

Zur ČECHschen Cohomologietheorie
der Nachbarschaftsräume
und ihrer Kompaktifizierungen

1968

von

Walther L. Fischer

aus

Fürth/Bay.

Zur ČECHschen Cohomologietheorie der Nachbarschaftsräume und ihrer Kompaktifizierungen

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
zur
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt

von

Walther L. Fischer

aus

Fürth/Bay.

Als Dissertation genehmigt
von der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung: 27. November 1968
Dekan: Professor Dr. H. Wegener
Erstberichterstatter: Professor Dr. G. Nöbeling
Zweitberichterstatter: Professor Dr. H. Bauer

Meinen Eltern

- 1. Die Eltern des Verstorbenen
- 2. Die Eltern des Verstorbenen
- 3. Die Eltern des Verstorbenen
- 4. Die Eltern des Verstorbenen
- 5. Die Eltern des Verstorbenen

Meinen Eltern

- 1. Die Eltern des Verstorbenen
- 2. Die Eltern des Verstorbenen
- 3. Die Eltern des Verstorbenen
- 4. Die Eltern des Verstorbenen
- 5. Die Eltern des Verstorbenen



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Inhalt

Einleitung	1
I. <u>δ-Räume und ihre Kompaktifizierungen</u>	
1. Definition und kanonische Topologie der δ -Räume	6
2. Erweiterung von δ -Räumen	15
3. δ -Räume und ihre Kompaktifizierungen	23
II. <u>ČECH-Cohomologie der δ-Paare und ihrer Kompaktifizierungen</u>	
1. Die Kategorie der δ -Paare	29
2. δ -Überdeckungen	31
3. Die ČECH-Cohomologiegruppen der δ -Räume und ihrer Kompaktifizierungen	35
Literatur	46

E i n l e i t u n g

= = = = =

1.

Die ČECH-STONE-Kompaktifizierung β ist ein kovarianter h -Funktork $\beta : \mathcal{A}_N \longrightarrow \mathcal{A}_C$ auf der Kategorie $\mathcal{A}_N$ der normalen Paare mit Werten in der Kategorie $\mathcal{A}_C$ der kompakten ¹⁾Paare. Ist H eine Cohomologietheorie auf $\mathcal{A}_C$, so bezeichne $H^\sim$ die Komposition von H mit dem Funktork β . Das Ergebnis ist eine Cohomologietheorie auf $\mathcal{A}_N$, die "mit H assoziierte Theorie normaler Paare". Ist insbesondere H die ČECHsche Cohomologietheorie auf $\mathcal{A}_C$, so kann die mit H assoziierte Theorie $H^\sim$ direkt über die Nerven offener Überdeckungen beschrieben werden. Genauer gilt: Die Inklusionsabbildung $i : (X, A) \subseteq (\beta X, \beta A)$ des normalen Paares (X, A) in das durch die ČECH-STONE-Kompaktifizierung gewonnene kompakte Paar $(\beta X, \beta A)$ induziert die Isomorphismen

$$i^* : H^q(\beta X, \beta A) \approx H^q_f(X, A) ,$$

wobei die $H^q_f(X, A)$ die ČECH-Cohomologiegruppen sind, die auf der Kollektion aller endlichen offenen Überdeckungen von (X, A) erklärt sind. Weitergehend gilt sogar $H^\sim \approx H_f$. ²⁾ - Analoge Aussagen gelten bezüglich der WALLMANschen Kompaktifizierung ωX eines topologischen Raumes X ³⁾ und für die mit H assoziierte Cohomologietheorie H auf der Kategorie $\mathcal{A}_{LC}$ der lokal-kompakten Paare. ⁴⁾

1) 'Kompakt' im Sinne von N.BOURBAKI.

2) EILENBERG-STEENROD [1] , X, 8., X, 9. ; X, 9.12.

3) WALLMAN [1] , S.118.

4) EILENBERG-STEENROD [1] , X, 6.; X, 6.9, S.294 D.

2.

Betrachtet man nun beliebige Kompaktifizierungen eines topologischen Raumes X , so stellt sich die analoge Frage nach der Isomorphie/Nicht-Isomorphie der relativen ČECH-Cohomologietheorien von X und der des kompakten Oberraums Y . Unter einer Kompaktifizierung eines topologischen Raumes X wollen wir hier ganz allgemein ein Paar (f, Y) verstehen derart, daß sich X durch f homöomorph auf einen Raum Y' abbilden läßt, der in einem kompakten Raum Y dicht liegt. Wir nennen weiter eine Kompaktifizierung (f, Y) von X feiner als die Kompaktifizierung (g, Z) von X , in Zeichen: $(f, Y) > (g, Z)$, falls es eine stetige Abbildung h von Y auf Z gibt so, daß $h \circ f = g$,

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y' & \subseteq & Y \\ & \searrow g & & & \downarrow h \\ & & Z' & \subseteq & Z \end{array} .$$

Die Kollektion aller Kompaktifizierungen eines Raumes X ist durch $>$ teilgeordnet. Ist X ein vollständig regulärer Raum, so existiert eine feinste (die ČECH-STONE-) Kompaktifizierung; ist X lokal-kompakt, so besitzt X eine größte (die ALEXANDROFFsche Ein-Punkt-) Kompaktifizierung. ¹⁾

Sei X ein topologischer Raum, $A \subseteq X$ in X abgeschlossen und seien $(f, Y) = \mu X$ und $(g, Z) = \lambda X$ zwei beliebige Kompaktifizierungen von X . Mit $H^q(X, A; G)$ bezeichnen wir wieder die q -te ČECHsche Cohomologiegruppe des Paares (X, A) mit Koeffizienten aus der Gruppe G .

Einfache Gegenbeispiele zeigen nun, daß die relative ČECHsche Cohomologietheorie eines topologischen Raumes X gegenüber beliebiger Kompaktifizierung von X nicht invariant ist.

¹⁾ KELLEY [1], S.149 ff.

1. Sei zunächst $\mathbb{Z}$ der 0-dimensionale total unzusammenhängende Raum der ganzen Zahlen mit der diskreten Topologie. $\mathbb{Z}$ ist lokal-kompakt. Die Ein-Punkt-Kompaktifizierung $\iota\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ ist ebenfalls 0-dimensional. Betrachten wir daneben die ČECH-STONE-Kompaktifizierung $\beta\mathbb{Z}$ von $\mathbb{Z}$, so ist auch $\beta\mathbb{Z}$ 0-dimensional.¹⁾ Während aber $\iota\mathbb{Z}$ abzählbar unendlich ist, hat $\beta\mathbb{Z}$ nach einem Satz von POSPISIL²⁾ die Kardinalzahl $2^{2^{\aleph_0}}$.

Die Cohomologiesequenzen für die Paare $(\iota\mathbb{Z}, \iota\emptyset)$ und $(\beta\mathbb{Z}, \beta\emptyset)$ haben die Gestalt

$$0 \longrightarrow H^0(\iota\mathbb{Z}, \iota; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^0(\iota\mathbb{Z}; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^0(\iota; \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

bzw.

$$0 \longrightarrow H^0(\beta\mathbb{Z}, \emptyset; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^0(\beta\mathbb{Z}; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^0(\emptyset; \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

Nun gilt allgemein: Ist X kompakt, so ist $H^0(X; \mathbb{Z})$ isomorph zur additiven Gruppe der ganzzahligen stetigen Funktionen auf X . Da $\iota\mathbb{Z}$ und $\beta\mathbb{Z}$ verschiedene Mächtigkeiten haben, sind $H^0(\iota\mathbb{Z}; \mathbb{Z})$ und $H^0(\beta\mathbb{Z}; \mathbb{Z})$ und also die Cohomologiesequenzen nicht isomorph.

2. Sei X die offene p -dimensionale Vollkugel. Die Ein-Punkt-Kompaktifizierung ιX von X ist dann die p -Sphäre S^p und also $H^p(\iota X; \mathbb{Z}) = H^p(S^p; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$. Kompaktifizieren wir X aber durch Bildung der Hülle $\bar{X}$, so gilt **jetzt** $H^p(\bar{X}; \mathbb{Z}) = 0$. Es sind also $H^p(\iota X; \mathbb{Z})$ und $H^p(\bar{X}; \mathbb{Z})$ und damit die zugehörigen Cohomologiesequenzen zueinander nicht isomorph.

Verschiedene Kompaktifizierungen eines topologischen Raumes X haben i.a. verschiedene Cohomologietheorien. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die so erhaltenen Cohomologietheorien durch innere Eigenschaften des Raumes X zu kennzeichnen.

¹⁾ GILLMAN - JERISON [1] .

²⁾ POSPISIL [1] , S.846. - ČECH [1] , S.835.

3.

Zur weiteren Untersuchung von Beziehungen in der teilgeordneten Menge der Kompaktifizierungen eines Raumes X bietet sich die Theorie der Nachbarschaftsräume im Sinne von V.A.EFREMOVIČ an, die vor allem YU.M.SMIRnov weiter ausgebaut hat. Die Definition der Nachbarschaftsstrukturen gründet auf Axiomen - systemen, in denen eine mit δ bezeichnete 2-stellige Relation zwischen Teilmengen einer Grundmenge X als Grundbegriff fungiert. Dabei bedeutet: $A \delta B$ - oder : $\delta(A,B)$, daß die Teilmengen A und B von X in einem gewissen, durch die Axiome näher bestimmten Sinne 'benachbart' sind. Ein Paar (X, δ) heißt 'Nachbarschaftsraum' oder δ -Raum.

Die δ -Räume verallgemeinern den Begriff des metrischen Raumes in ähnlicher Weise wie die uniformen Räume; dennoch überdecken sich beide Theorienbildungen nicht. Die Nachbarschaftsräume nehmen vielmehr eine Art Mittelstellung zwischen den topologischen und den uniformen Räumen ein: Die aus einer uniformen Struktur abgeleitete Topologie wird eigentlich in zwei Stufen konstruiert: zuerst gewinnt man aus der uniformen Struktur eine Nachbarschaftsstruktur und dann aus dieser die betreffende Topologie. Die Beziehung zwischen uniformen Räumen und δ -Räumen erhellt auch die folgende Tatsache: Nach TUCKEY - SMIRNOV¹⁾ ist es möglich, auf einer Menge X mit Hilfe von Überdeckungen eine uniforme Struktur Σ zu definieren; diese erweist sich mit der nach BOURBAKI-WEIL gewonnenen Uniformität als äquivalent. Jede TUCKEY-SMIRNOV uniforme Struktur Σ induziert nun in einer Menge X eine δ -Struktur. Umgekehrt gibt es zu jeder δ -Struktur auf X eine uniforme Struktur Σ , die mit ihr verträglich ist.

¹⁾ KELLEY [1] , S.207 . - MAMUZIC [1] , S.116.

Jede δ -Struktur auf einer Menge X induziert in X eine Topologie $\mathcal{C}$. Jeder Raum $(X, \delta, \mathcal{C})$ ist vollständig regulär. Außerdem besitzt jeder solche Raum $(X, \delta, \mathcal{C})$ eine eindeutig bestimmte maximale absolut abgeschlossene δ -Erweiterung; diese ist zudem kompakt. Andererseits induziert jede Kompaktifizierung eines Raumes X in X eine δ -Struktur. Die Menge aller mit einem gegebenen vollständig regulären Raum X assoziierten δ -Räume ist eineindeutig auf die Menge aller seiner Kompaktifizierungen abbildbar. Die Theorie der δ -Räume ist also äquivalent mit dem Studium vollständig regulärer Räume und ihrer Kompaktifizierungen.

4.

In der vorliegenden Arbeit geben wir eine direkte Beschreibung der mit der ČECHschen Cohomologietheorie H auf $\mathcal{A}_C$ assoziierten Theorie ${}_{\delta}H^u$ auf der Kategorie $\mathcal{A}_{\delta}$ der δ -Paare über die Nerven von δ -Überdeckungen und zeigen, daß die relative ČECHsche Cohomologietheorie jedes δ -Raumes X isomorph ist zur relativen ČECHschen Cohomologietheorie seiner kompakten δ -Erweiterung uX .

In Kapitel I stellen wir die wichtigsten Tatsachen aus der Theorie der δ -Räume und ihrer δ -Erweiterungen im Anschluß an die Arbeiten von YU.M.SMIRNOV zusammen. Beweise geben wir nur dann und insoweit als ihre Kenntnis für die Konstruktion der kompakten δ -Erweiterung uX eines δ -Raumes X oder für die Aussagen in Kapitel II von Bedeutung sind. Wir schließen uns hier den Bezeichnungen von SMIRNOV, in Kapitel II jenen von EILENBERG-STEENROD [1] an. -

Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Dr. G. NÖBELING für die Anregungen und Ratschläge, mit denen er die vorliegende Arbeit gefördert hat.

I. δ -Räume und ihre Kompaktifizierungen

= = = = =

1. Definition und kanonische Topologie der δ -Räume

I. DEFINITION 1.1. Unter einem Nachbarschaftsraum im Sinne von V.A.EFREMOVIČ - kurz: einem δ -Raum¹⁾ - verstehen wir ein geordnetes Paar (X, δ) bestehend aus einer Menge X zusammen mit einer binären Relation δ auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ von X derart, daß die folgenden Axiome erfüllt sind:

(δ_1) : $(A, B) \in \delta$ impliziert $(B, A) \in \delta$.

(δ_2) : $(A \cup B, C) \in \delta$ genau dann, wenn mindestens eine der Relationen $(A, C) \in \delta$ und $(B, C) \in \delta$ erfüllt ist.

(δ_3) : $(\{a\}, \{b\}) \in \delta$ genau dann, wenn $a = b$, für alle $a, b \in X$.

(δ_4) : $(A, \emptyset) \notin \delta$ für jedes $A \subseteq X$.

(δ_5) : $(A, B) \notin \delta$ impliziert die Existenz zweier Mengen A_1 und B_1 mit $A_1 \cup B_1 = X$ so, daß $(A, A_1) \notin \delta$ und $(B, B_1) \notin \delta$.

δ ist als binäre Relation auf $\mathcal{P}(X)$ durch eine Teilmenge von $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ bestimmt. Statt $(A, B) \in \delta$ schreiben wir vielfach kürzer $\delta(A, B)$, und statt $(A, B) \notin \delta$ kürzer $\bar{\delta}(A, B)$ und lesen: $\delta(A, B)$: "A ist B benachbart", bzw. $\bar{\delta}(A, B)$: "A ist entfernt von B".

BEISPIEL 1.2. Ein metrischer Raum R mit $\delta(A, B) := \text{dist}(A, B) = 0$ ist ein δ -Raum.

¹⁾ Im Englischen: proximity space.

DEFINITION 1.3. (X, δ) heißt allgemeiner δ -Raum, wenn δ den Axiomen (δ_1) , (δ_2) , (δ_4) , (δ_5) genügt und statt (δ_3) dem Axiom

$$(\delta'_3): (\{a\}, \{a\}) \in \delta \text{ für jedes } a \in X.$$

LEMMA 1.4. In einem beliebigen (allgemeinen) δ -Raum (X, δ) gelten folgende Aussagen

- (i) Ist $A \subseteq B \subseteq X$ und ist $\delta(A, A_1)$ für ein gewisses $A_1 \subseteq X$, so ist auch $\delta(B, A_1)$.
- (ii) Für jede nicht-leere Menge $A \subseteq X$ gilt: $a \in A$ impliziert stets $\delta(\{a\}, A)$.
- (iii) Für je zwei Mengen $A, B \subseteq X$ gilt: $A \cap B \neq \emptyset$ impliziert $\delta(A, B)$.

Anmerkung: (iii) impliziert insbesondere $\delta(A, A)$ für jedes nicht-leere $A \subseteq X$.

II. Sei (X, δ) ein δ -Raum. X wird dann durch die Relation δ auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ von X in natürlicher Weise topologisiert. Die Topologie τ auf X definieren wir wie folgt

DEFINITION 1.5. Die Topologie τ auf X ist eine Abbildung $\tau: \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ so, daß für jedes $A \subseteq X$

$$\tau(A) := \{ a \mid a \in X \text{ und } \delta(\{a\}, A) \}.$$

$\tau(A)$ heißt die abgeschlossene Hülle von A im δ -Raum (X, δ) . Wir schreiben vielfach kurz: $\tau(A) = \bar{A}$.

Betrachten wir einen δ -Raum (X, δ) als topologischen Raum (Theorem 1.6.), so denken wir uns die Topologie τ auf (X, δ) stets gemäß Definition 1.5. erklärt.

THEOREM 1.6. Jeder (allgemeine) δ -Raum (X, δ) ist mit Definition 1.5. ein topologischer Raum (X, δ, τ) , d.h.

- (i) $\tau(\emptyset) = \emptyset$.
- (ii) $A \subseteq \tau(A)$.
- (iii) $\tau(A \cup B) = \tau(A) \cup \tau(B)$.
- (iv) $\tau(\tau(A)) = \tau(A)$.

Für (X, δ, τ) schreiben wir kürzer (X, τ) ; wenn Verwechslungen ausgeschlossen sind, einfach X .

DEFINITION 1.7. Eine Menge $A \subseteq X$, die alle Punkte enthält, die A benachbart sind, heißt τ -abgeschlossen in X .¹⁾

$A \subseteq X$ ist τ -abgeschlossen genau dann, wenn $\tau(A) = A$.

DEFINITION 1.8. Das Komplement $X - A$ einer in (X, δ, τ) abgeschlossenen Menge A heißt τ -offen in X .²⁾

LEMMA 1.9. Die Mengen A und B eines (allgemeinen) δ -Raums X sind benachbart genau dann, wenn die Hüllen $\tau(A)$ und $\tau(B)$ in X benachbart sind; also $\delta(A, B)$ genau dann, wenn $\delta(\bar{A}, \bar{B})$.

Weiterhin führen wir den Begriff der δ -Nachbarschaft einer Menge A in einem δ -Raum X ein durch die

DEFINITION 1.10. Sei X ein allgemeiner δ -Raum und $A \subseteq X$. Jede Menge $B \subseteq X$ mit der Eigenschaft, daß A von $X - B$ entfernt ist, also mit $\bar{\delta}(A, X - B)$, heißt δ -Nachbarschaft von A in X . In Zeichen: $B \ni A$.

In einem δ -Raum haben die δ -Nachbarschaften die folgenden grundlegenden Eigenschaften:

LEMMA 1.11.

- (N₁): $B \ni A$ impliziert $X - A \ni X - B$.
- (N₂): $B \ni A$ impliziert $B \ni A$.
- (N₃): $A \ni B \ni A_1$ oder $A \ni B \ni A_1$ impliziert $A \ni A_1$.

1) Wenn Verwechslungen ausgeschlossen sind : abgeschlossen in X .

2) Wenn Verwechslungen ausgeschlossen sind : offen in X .

(N₄): $B_i \ni A_i, i=1,2,\dots,k$, impliziert

$$\bigcup_i B_i \ni \bigcup_i A_i \quad \text{und} \quad \bigcap_i B_i \ni \bigcap_i A_i.$$

(N₅): $B \ni A$ impliziert die Existenz einer Menge A_1 mit der Eigenschaft, daß $B \ni A_1 \ni A$.

Wenn eine δ -Nachbarschaft auch nicht notwendig eine offene Menge zu sein braucht, so gilt doch

LEMMA 1.12. Zu jeder δ -Nachbarschaft B von A in X existiert eine τ -offene δ -Nachbarschaft $U \subseteq B$ von A .

Beweis: Sei $B \ni A$. Dann ist nach 1.10. $\bar{\delta}(A, X - B)$ und wegen 1.9. $\bar{\delta}(A, \overline{X - B})$. Daher gilt für die offene Menge $U = X - \overline{X - B}$: $U \subseteq B$ und $\bar{\delta}(A, X - (X - \overline{X - B}))$, also $U \ni A$. qed

Schließlich erwähnen wir noch

LEMMA 1.13. Der Durchschnitt aller δ -Nachbarschaften von A ist die Hülle $\bar{A}$ von A .

Ähnlich wie das Axiom (δ_5), so legt auch die folgende mit (δ_5) äquivalente Aussage eine Trennung fest.

LEMMA 1.14. Je zwei Mengen A und B , die im δ -Raum X voneinander entfernt sind, besitzen fremde δ -Nachbarschaften.

Aus Lemma 1.14. folgt, daß jeder δ -Raum X dem Trennungsaxiom T_2 genügt, ein HAUSDORFF-Raum ist. Darüber hinaus ist jeder δ -Raum X regulär; denn: Für jede Teilmenge $A \subseteq X$ ist die Menge $\tau(A)$ abgeschlossen in X , d.h. $\tau(\tau(A)) = \tau(A)$. Ist nun der Punkt $a \notin X$ nicht in $\tau(A)$ gelegen, so ist er auch nicht Element von $\tau(\tau(A))$, d.h. er ist der Menge $\tau(A)$ nicht benachbart (1.5.). Also gibt es nach Lemma 1.14. fremde offene δ -Nachbarschaften des Punktes a und der Menge $\tau(A)$, so daß auch das Trennungsaxiom T_3 erfüllt ist.

Es läßt sich sogar weiter zeigen, daß jeder δ -Raum X vollständig regulär ist.¹⁾ Diese Tatsache ergibt sich auch als Korollar zu Theorem 2.17.. Dort wird sich zudem erweisen, daß der Begriff des δ -Raums äquivalent ist mit dem Begriff des vollständig regulären Raumes zusammen mit einer gewissen seiner Kompaktifizierungen, nämlich jener, die in dem gegebenen vollständig regulären Raum die betreffende δ -Struktur induziert.

Zum Beweis des folgenden Theorems benötigen wir das

LEMMA 1.15. In einem kompakten δ -Raum X sind zwei Mengen A und B benachbart genau dann, wenn $\tau(A) \cap \tau(B) \neq \emptyset$.

Beweis: Nach Lemma 1.9. und 1.4.(iii) ergibt sich:

$\tau(A) \cap \tau(B) \neq \emptyset$ impliziert $\delta(A, B)$. -

Bleibt zu zeigen, daß $\tau(A) \cap \tau(B) = \emptyset$ die Aussage zur Folge hat, daß die Mengen $\tau(A)$ und $\tau(B)$ voneinander entfernt sind, d.h. also, daß $\overline{\delta}(\tau(A), \tau(B))$.

Nach Theorem 1.6. ist die Menge $\tau(A)$ abgeschlossen, so daß sie als Teilraum eines kompakten Raumes selbst kompakt ist. Da n.Vor. kein Punkt von $\tau(A)$ in $\tau(B) = \tau(\tau(B))$ liegt, ist also jeder Punkt $a \in \tau(A)$ von $\tau(B)$ entfernt. Nach Lemma 1.14. und Lemma 1.12. existieren fremde offene δ -Nachbarschaften $U(a)$ und $V(a)$ des Punktes a und der Menge $\tau(B)$ für jedes $a \in \tau(A)$. Wegen $\overline{\delta}(\tau(B), X - V(a))$ und $U(a) \subseteq X - V(a)$ ist auch $\overline{\delta}(\tau(B), U(a))$. Mit Axiom (δ_1) von Definition 1.1. haben wir dann für jedes $a \in \tau(A)$ auch $\overline{\delta}(U(a), \tau(B))$. Die Familie aller so gewonnenen offenen δ -Nachbarschaften $U(a)$ bildet eine Überdeckung der Menge $\tau(A)$. Da $\tau(A)$ kompakter Teilraum des kompakten δ -Raums X ist, existiert in die-

¹⁾ EFREMOVIČ [4], S.196 -197. -

ser Familie eine endliche Teilfamilie von offenen δ -Nachbarschaften $U(a_i)$ ($i=1, \dots, n$), die ebenfalls $\tau(A)$ überdeckt. Damit ist $\tau(A) \subseteq \bigcup_i U(a_i)$ und, da jedes $U(a_i)$ von $\tau(B)$ entfernt ist, nach Axiom (δ_2) von 1.1. auch die Vereinigung $\bigcup_i U(a_i)$ von der Menge $\tau(B)$ entfernt. Nach Lemma 1.4.(1) ist dann auch $\tau(A)$ von $\tau(B)$ entfernt. qed

THEOREM 1.16. Jeder kompakte Raum X ist auf genau eine Weise ein δ -Raum.

Beweis: Sei (X, τ_1) ein kompakter Raum und sei auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ von X eine binäre Relation δ_1 wie folgt erklärt: Für $A, B \subseteq X$ setzen wir $\delta_1(A, B)$ genau dann, wenn $\tau_1(A) \cap \tau_1(B) \neq \emptyset$.

Betrachten wir nun auf X eine beliebige δ -Struktur δ_2 so, daß die von ihr auf X induzierte Topologie τ_2 mit τ_1 übereinstimmt, so bedingt Lemma 1.15. daß $\delta_2 = \delta_1$. qed

DEFINITION 1.17. Sei (X, δ) ein allgemeiner δ -Raum und $R \subseteq X$ eine beliebige nicht-leere Teilmenge. Auf $\mathcal{P}(R)$ definieren wir dann eine binäre Relation δ_R :

$$\delta_R(A, B) \text{ für } A, B \subseteq R := \delta(A, B) \text{ in } (X, \delta).$$

Der allgemeine δ -Raum (R, δ_R) heißt δ -Teilraum des δ -Raums (X, δ) .

Nach Definition 1.17. übernehmen wir also die Nachbarschaftsbeziehungen des δ -Raums (X, δ) unverändert für die Teilmengen von $R \subseteq X$, um R zu einem Teilraum von (X, δ) zu machen. Man zeigt leicht, daß δ_R den Axiomen $(\delta_1), \dots, (\delta_5)$ von 1.1. genügt, insbesondere auch dem Axiom (δ_3) , falls (X, δ) ein δ -Raum ist. Überdies stimmt die vom topologischen Raum (X, δ, τ) in $R \subseteq X$ (im üblichen Sinne) induzierte Topologie mit der nach 1.5. in (R, δ_R) erklärten Topologie τ_R überein. Insbesondere gilt für die Hülle $\tau_R(A)$ einer

Menge $A \subseteq R$ in R :

$$\tau_R(A) = R \cap \tau(A).$$

DEFINITION 1.18. Sei R ein topologischer Raum. Ein kompakter Raum X heißt Kompaktifizierung κR von R , wenn

(i): R Teilraum von X ist, und

(ii): R überall dicht in X liegt, d.h. falls $\bar{R} = X$.

Angenommen nun, es sei ein vollständig regulärer Raum R gegeben. Nach 1.16. ist jede Kompaktifizierung κR von R auf genau eine Weise ein δ -Raum. R ist aber auch Teilmenge dieses eindeutig bestimmten δ -Raums. Mit 1.17. kann man also sagen:

Jede Kompaktifizierung κR von R induziert in R eine δ -Struktur.

Jeder vollständig reguläre Raum besitzt bekanntlich mindestens eine Kompaktifizierung. Also gilt

THEOREM 1.19. Jeder vollständig reguläre Raum R kann auf mindestens eine Weise mit einer δ -Struktur versehen werden, die die Topologie von R erzeugt.

III. DEFINITION 1.20. Eine Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ des δ -Raums (X, δ_X) in den δ -Raum (Y, δ_Y) heißt eine δ -Abbildung, wenn die Bilder $f(A)$ und $f(B)$ von in X benachbarten Mengen A und B stets in Y benachbart sind, d.h. falls $A, B \subseteq X$ und $\delta_X(A, B)$ impliziert $\delta_Y(f(A), f(B))$.

LEMMA 1.21. f ist eine δ -Abbildung genau dann, wenn für die Urbilder von je zwei Mengen A' und B' aus Y mit $\delta_Y(A', B')$ stets folgt, daß in X $\delta_X(f^{-1}(A'), f^{-1}(B'))$.

THEOREM 1.22. Jede δ -Abbildung von X in Y ist stetig.

Beweis: Sei f eine δ -Abbildung von (X, δ_X, τ_X) in (Y, δ_Y, τ_Y) . Sei A eine beliebige Teilmenge von X und $a \in X$ ein Punkt der Hülle $\tau_X(A)$ von A in X . $a \in \tau_X(A)$ impliziert $\delta_X(\{a\}, A)$. Da f nachbarschaftstreu ist, erhalten wir $\delta_Y(\{f(a)\}, f(A))$, d.h. $f(a) \in \tau_Y(f(A))$. Das bedeutet: Für jedes $A \subseteq X$ gilt $f(\tau_X(A)) \subseteq \tau_Y(f(A))$. qed

DEFINITION 1.23. Eine δ -Abbildung f ist ein δ -Homöomorphismus, wenn f injektiv, surjektiv und f^{-1} ebenfalls eine δ -Abbildung ist. ¹⁾

Das Theorem 1.22. ist nicht umkehrbar. Eine stetige Abbildung eines δ -Raums in einen δ -Raum ist nicht notwendig eine δ -Abbildung. So sind die folgenden Flächen zwar einander homöomorph, aber nicht δ -homöomorph: $(x^2 + y^2)(z + 1)^2 = z$, $x^2 + y^2 = z \cdot 2$

Die Umkehrung von Theorem 1.22. gilt jedoch in folgendem Fall

THEOREM 1.24. Jede stetige Abbildung eines kompakten Raumes in einen δ -Raum ist eine δ -Abbildung.

Beweis: Sei $f: X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung des kompakten Raums X in den δ -Raum Y . Zu zeigen ist, daß die Bilder $f(A)$ und $f(B)$ irgend zweier benachbarter Mengen A und B von X in Y benachbart sind. Nun folgt nach 1.15. aus $\delta_X(A, B)$ in X , daß $\tau_X(A) \cap \tau_X(B) \neq \emptyset$. Die Hüllen ihrer Bilder $f(A) = C$ und $f(B) = D$ treffen sich dann ebenfalls. Also gilt nach 1.9. mit $\delta_Y(\tau_Y(C), \tau_Y(D))$ auch $\delta_Y(C, D)$. qed

Schließlich fügen wir noch die Bemerkung an

LEMMA 1.25. Sind X und Y zwei δ -Räume, X ein δ -Teil-

¹⁾ Bei V.A.EFREMOVIČ: Eine δ -Abbildung f ist ein δ -Homöomorphismus oder Äquimorphismus, wenn f injektiv und f^{-1} ebenfalls eine δ -Abbildung ist.

²⁾ EFREMOVIČ [4], S.194.

raum von Y , so ist die Inklusionsabbildung $i: X \subseteq Y$ eine δ -Abbildung.

Beweis: Seien A' und B' irgend zwei Mengen aus Y mit $\overline{\delta}_Y(A', B')$. Wir zeigen, daß $i^{-1}(A')$ und $i^{-1}(B')$ in X voneinander entfernt sind. Nun ist aber $i^{-1}(A') = A' \cap X = A$ und $i^{-1}(B') = B' \cap X = B$. Mit $\overline{\delta}_Y(A', B')$ ist auch $\overline{\delta}_Y(A, B)$ und - da X δ -Teilraum von Y ist - nach Definition 1.17. also insbesondere $\overline{\delta}_X(A, B)$. qed

2. Erweiterungen von δ -Räumen

I. DEFINITION 2.1. Unter einer δ -Erweiterung eines δ -Raumes X verstehen wir jeden δ -Raum $\tilde{X}$, der X als überall dichten δ -Teilraum enthält, d.h. falls $\tilde{\tau}(X) = \tilde{X}$.

DEFINITION 2.2. Ein δ -Raum X heißt absolut abgeschlossen, wenn X in jedem δ -Raum X' abgeschlossen ist, der X als Teilraum enthält.

Jeder kompakte δ -Raum ist absolut abgeschlossen.

Wir werden nun im Anschluß an SMIRNOV ([1], [2]) zu jedem δ -Raum X eine Erweiterung uX konstruieren (2.3. - 2.7.) und in uX eine Nachbarschaftsrelation δ'' erklären (2.7. - 2.10.). Die Erweiterung wird sich als absolut abgeschlossene δ -Erweiterung erweisen (2.14., 2.16.), ja sogar als Kompaktifizierung, die eindeutig bestimmt ist (2.17., 2.18.).

Die Methode der Konstruktion von uX folgt im wesentlichen der Methode von P.S.ALEXANDROFF ([1]) zur Konstruktion der maximalen Kompaktifizierung eines vollständig regulären Raumes. Bezüglich der Darstellung vergleiche man unsere Abschnitte I und II mit den Abschnitten 1 und 2 bei H.BAUER ([1]). Die von SMIRNOV angegebene Konstruktion von uX ist außerdem eng verwandt mit der WALLMANschen ω -Kompaktifizierung (WALLMAN [1]; SAMUEL [1]).

DEFINITION 2.3. Gegeben sei ein δ -Raum X . Ein System $\mathfrak{S}$ von Mengen $A \subseteq X$ heißt zentriert, wenn der Durchschnitt von je endlich vielen Mengen des Systems nicht leer ist.

DEFINITION 2.4. Ein System $\mathfrak{S}$ von Mengen $A \subseteq X$ heißt ein δ -System, wenn jede Menge A von $\mathfrak{S}$ δ -Nachbarschaft einer Menge B von $\mathfrak{S}$ ist.

Sei $\mathfrak{S}$ ein zentriertes δ -System. Ergänzen wir $\mathfrak{S}$ durch Hinzunahme der Durchschnitte aller möglichen endlichen Teilsysteme, so erhalten wir $((N_4)$ von Lemma 1.11.) ein neues zentriertes δ -System $\mathfrak{S}'$ derart, daß nun jeder endliche Durchschnitt seiner Elemente ebenfalls zum System $\mathfrak{S}'$ gehört. $\mathfrak{S}'$ ist ein Raster.

Ergänzen wir das System $\mathfrak{S}'$ durch alle Mengen $A \subseteq X$, die irgend eine Menge $B \in \mathfrak{S}'$ enthalten, so ist das neue System $\mathfrak{S}''$ ebenfalls ein zentriertes δ -System. $\mathfrak{S}''$ ist ein Filter.

DEFINITION 2.5. Unter einem Ende des δ -Raumes X verstehen wir ein maximales zentriertes δ -System, also ein zentriertes δ -System, das nicht echtes Teilsystem eines zentrierten δ -Systems ist.

Aus den obigen Bemerkungen folgt sofort, daß der Durchschnitt von je endlich vielen Elementen eines Endes $\mathfrak{S}$ zu $\mathfrak{S}$ gehört. Jedes Ende ist ein Raster. - Ferner: Jede Menge $A \subseteq X$, die ein Element des Endes $\mathfrak{S}$ enthält, gehört ebenfalls zu $\mathfrak{S}$. Jedes Ende ist ein Filter. - Nach dem Lemma von ZORN existiert zu jedem zentrierten δ -System $\mathfrak{S}$ ein Ende $\mathfrak{S}'$ des δ -Raums X mit $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{S}'$. Jedes zentrierte δ -System ist also in mindestens einem Ende des δ -Raums X enthalten.

Die Menge $\mathfrak{S}_A$ aller δ -Nachbarschaften einer nicht-leeren Menge A des δ -Raums X ist ein zentriertes δ -System. Besteht A aus einem Punkt $x \in X$, so gilt

LEMMA 2.6. Das System $\mathfrak{S}_x$ aller δ -Nachbarschaften eines beliebigen Punktes $x \in X$ ist ein Ende von X .

Beweis: Wir betrachten das System $\mathfrak{S}_x$ aller δ -Nachbarschaften eines Punktes $x \in X$ und zeigen ,

daß kein δ -System $\mathfrak{S}$, das $\mathfrak{S}_x$ als echtes Teilsystem enthält, zentriert ist. - Sei also $\mathfrak{S}_x \subset \mathfrak{S}$. Zunächst wählen wir eine Menge $A = \mathfrak{S} - \mathfrak{S}_x$. Da $\mathfrak{S}$ ein δ -System ist, können wir in ihm Mengen B und C finden so, daß $A \supset B \supset C$ (2.4.). Da $A \in \mathfrak{S} - \mathfrak{S}_x$, ist $A \not\supset x$; also ist umso mehr $x \notin B$ und daher $\bar{\delta}(\{x\}, C)$. Das bedeutet, daß $X - C \in \mathfrak{S}_x$ und, da n.Vor. $\mathfrak{S}_x$ als Teilsystem in $\mathfrak{S}$ enthalten ist, daß $X - C \in \mathfrak{S}$. Andererseits ist aber auch $C \in \mathfrak{S}$. $(X - C) \cap C = \emptyset$. Das heißt aber, daß das System $\mathfrak{S}$ nicht zentriert ist. qed

II. Sei nun (X, δ') ein gegebener δ -Raum.

DEFINITION 2.7. Die Menge aller Enden eines gegebenen δ -Raums X bezeichnen wir mit uX ,

$$uX := \{ \mathfrak{S} \mid \mathfrak{S} \text{ Ende von } (X, \delta') \}.$$

In der Menge uX definieren wir eine Nachbarschaftsrelation δ'' und machen damit uX zu einem δ -Raum. Dazu erklären wir zuerst den auch für die späteren Überlegungen bedeutsamen Operator $0 < \dots >$.

DEFINITION 2.8. Sei $A \subseteq X$. $0 < A >$ ist die Menge aller Enden $\mathfrak{S}$ von X , die A als ein Element enthalten.

LEMMA 2.9.

1. Für beliebige Mengen $A, B \subseteq (X, \delta')$ gilt
 - a) $0 < A > \cap 0 < B > = 0 < A \cap B >$.
 - b) $0 < A > \cup 0 < B > \subseteq 0 < A \cup B >$.
2. Sind A und B Mengen von (X, δ') so, daß $\bar{\delta}'(X-A, X-B)$, dann ist $0 < A > \cup 0 < B > = uX$.
3. $0 < \emptyset > = \emptyset$, $0 < X > = uX$.

Beweis:

Zu 1a: Sei $\mathfrak{S} \in 0 < A > \cap 0 < B >$, also ein

Ende aus uX , das sowohl A als auch B als Element enthält. Mit $A \in \xi$ und $B \in \xi$ ist dann auch $A \cap B \in \xi$ (ξ Raster). Also ist $\xi \in O \langle A \cap B \rangle$. - Ist andererseits $\xi \in O \langle A \cap B \rangle$, so ist $A \cap B \in \xi$. Mit $A \cap B$ ist auch jede Obermenge von $A \cap B$ Element von ξ (ξ Filter). Also sind insbesondere $A \in \xi$ und $B \in \xi$, d.h. $\xi \in O \langle A \rangle \cap O \langle B \rangle$.

Zu 1 b: $O \langle A \rangle \cup O \langle B \rangle$ ist die Menge aller Enden aus uX , die A oder B oder beide Mengen A , B als Element enthalten. Mit $A \in \xi$ oder $B \in \xi$ ist stets auch die Obermenge $A \cup B \in \xi$, also $\xi \in O \langle A \cup B \rangle$. - Daß im allgemeinen keine Gleichheit besteht, ergibt sich aus der Beziehung: Sind $H, H' \subseteq X$ und $H \subseteq H'$, so ist $O \langle H \rangle \subseteq O \langle H' \rangle$.

Zu 2: Die Behauptung besagt: Jedes Ende ξ aus uX enthält entweder A oder B , falls $X - A$ und $X - B$ nicht benachbart sind. - Wir unterscheiden die beiden Fälle

α) $A = X$. Dann ist klar, daß $A \in \xi$. -

β) Andernfalls ist $X - A = D$ nicht leer. Also ist das System ξ_D aller δ -Nachbarschaften von D ein zentriertes δ -System ((N_5) von Lemma 1.11.). Trifft jedes H von ξ die Menge D , so ist die Vereinigung $\xi_D \cup \xi$ des Systems ξ_D mit dem Ende ξ ein zentriertes δ -System und daher $\xi_D \subseteq \xi$. $\delta'(D, X-B)$ bedeutet aber $B \supseteq D$, also $B \in \xi_D$ und folglich $B \in \xi$. - Bleibt schließlich der Fall, daß $D \neq \emptyset$ und das Ende ξ ein Element H besitzt, das nicht trifft. Dann ist offenbar $H \subseteq A$ und also $A \in \xi$. - qed

Zu 3: Vergleiche die Definitionen 2.3., 2.4., 2.5., 2.7.-

Wir erklären nun in der Menge uX eine Nachbarschaftsrelation durch die

DEFINITION 2.10. Seien $\sqcap$ und $\sqcap$ irgend zwei Mengen von Enden von (X, δ') . $\sqcap$ und $\sqcap$ sind voneinander entfernt, $\delta''(\sqcap, \sqcap)$, genau dann, wenn es in (X, δ') zwei Mengen A und B mit $\delta'(A, B)$ gibt so, daß $\sqcap \subseteq 0 < A >$, $\sqcap \subseteq 0 < B >$.

THEOREM 2.11. Die in 2.10. auf der Menge uX aller Enden von (X, δ') definierte Relation δ'' genügt den Axiomen (δ_1) - (δ_5) von Definition 1.1.. (uX, δ'') ist ein δ -Raum.

III. Nach Definition 1.5. und Theorem 1.6. induziert die Relation δ'' auf X eine Topologie τ'' . Die folgenden Aussagen stellen Beziehungen zwischen den topologischen Räumen (X, δ', τ') und (uX, δ'', τ'') fest.

Die Abbildung, die jedem $x \in X$ das Ende ξ_x zuordnet, sei mit $\xi : x \longrightarrow \xi_x$ bezeichnet. Zunächst gilt

LEMMA 2.12. Für jede Menge $A \subseteq X$ ist das Urbild $\xi^{-1}(0 < A >)$ der Kern $\underline{A}$ von A in X.

Beweis: Sei $x \in \xi^{-1}(0 < A >)$. Das bedeutet, daß $\xi_x \in 0 < A >$, d.h. $A \in \xi_x$ und also $A \ni x$. Nach Lemma 1.12. ergibt sich weiter, daß $x \in \underline{A}$. - Sei umgekehrt $x \in \underline{A}$. Das bedeutet, daß x von $X - \underline{A}$ entfernt ist (vgl. Definition 1.5.). Folglich ist $\underline{A} \ni x$ und umsomehr $A \ni x$. Damit ist also $\xi_x \in 0 < A >$. qed

THEOREM 2.13. Die Abbildung $\xi : x \longrightarrow \xi_x$ ist ein δ -Homöomorphismus von (X, δ', τ') auf einen Unterraum von (uX, δ'', τ'') .

Identifizieren wir nun jeden Punkt $x \in X$ mit dem Ende ξ_x , so erweist sich der δ -Raum (X, δ') als Teilraum des δ -Raums (uX, δ'') . Lemma 2.12 nimmt damit die folgende Form an

LEMMA 2.12'. Für jedes $A \subseteq X$ ist $X \cap 0 \langle A \rangle = \underline{A}$.

Weiter zeigen wir

THEOREM 2.14. Der δ -Raum uX ist eine δ -Erweiterung des δ -Raums X .

Beweis: Zum Beweis genügt es, X als überall dichte Teilmenge des δ -Raums uX aufzuzeigen, d.h. es ist zu zeigen, daß jeder Punkt $\xi \in uX$ dem X benachbart ist: $\delta''(\xi, X)$. - Nach der Definition 2.10. von δ'' in uX genügt es zu zeigen, daß je zwei Mengen A und B von X mit $\xi \in 0 \langle A \rangle$ und $X \subseteq 0 \langle B \rangle$ einander benachbart sind. Aus Lemma 2.12. ergibt sich, daß dann $X = B$ sein muß und daß also - wegen $A \subseteq X$ aus $X \cap A \neq \emptyset$ nach 1.4.(iii) - $\delta'(A, B)$ ist. qed

Ein Kriterium für die absolute Abgeschlossenheit eines δ -Raums liefert das

THEOREM 2.15. Ein δ -Raum X ist absolut abgeschlossen genau dann, wenn jedes zentrierte δ -System von Mengen aus X nicht-leeren Durchschnitt hat.

Beweisskizze: Angenommen X ist nicht absolut abgeschlossen. Dann gibt es eine δ -Erweiterung $X' = X \cup \{y\}$ von X , die aus allen Punkten $x \in X$ und einem weiteren, zu X adjungierten Punkt y besteht. Wir betrachten dann das Ende η_y von X' , das aus allen δ -Nachbarschaften von y besteht. Das System $\xi = \{X \cap H \mid H \in \eta_y\}$ der Durchschnitte des Teilraums X mit allen δ -Nachbarschaften H von y in X' erweist sich als zentriertes δ -System von X mit leerem Durchschnitt. - Umgekehrt: Besitzt X ein zentriertes δ -System ξ' mit leerem Durchschnitt; ergänzen wir es zu einem Ende ξ , so ist wegen $\xi' \subseteq \xi$ der Durchschnitt aller $A \in \xi$ leer. Das bedeutet $\xi \in uX - X$; X ist also nicht absolut abgeschlossen.

Das in Theorem 2.15. gegebene Kriterium spielt nun in den Beweisen der folgenden Theoreme die zentrale Rolle.

THEOREM 2.16. Für jeden δ -Raum X ist die δ -Erweiterung uX absolut abgeschlossen.

THEOREM 2.17. Ein δ -Raum (X, δ, τ) ist absolut abgeschlossen genau dann, wenn er (bezüglich der von der δ -Relation induzierten Topologie τ) kompakt ist.

Beweis: Jeder kompakte δ -Raum ist absolut abgeschlossen. - Sei umgekehrt X ein absolut abgeschlossener δ -Raum. Wir haben dann zu zeigen, daß jedes zentrierte System $\mathcal{U}$ von abgeschlossenen Mengen aus X einen nicht-leeren Durchschnitt hat. Dazu betrachten wir für jedes $A \in \mathcal{U}$ das System $\mathcal{H}_A$ aller seiner δ -Nachbarschaften. Da kein $A \in \mathcal{U}$ leer ist, ist jedes System $\mathcal{H}_A$ ein zentriertes System. Schließlich betrachten wir die Vereinigung $\mathcal{H} = \bigcup \mathcal{H}_A$ aller Systeme $\mathcal{H}_A$. $\mathcal{H}$ ist ein δ -System. Da $\mathcal{U}$ zentriert ist, erweist sich auch $\mathcal{H}$ als zentriert. Der Durchschnitt aller $H \in \mathcal{H}$ ist also nicht leer, da X absolut abgeschlossen ist. Zeigen wir noch, daß dieser Durchschnitt $\bigcap H$ mit dem Durchschnitt aller $A \in \mathcal{U}$ zusammenfällt. Nach Lemma 1.13. ist der Durchschnitt aller $H \in \mathcal{H}_A$ für jedes $A \in \mathcal{U}$ die Menge A selbst. Daher ist $\bigcap_{A \in \mathcal{U}} A = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} H$ und folglich nicht leer.

KOROLLAR 1: Jeder δ -Raum X ist als topologischer Raum vollständig regulär.

Beweis: Sei (uX, δ'', τ'') die absolut abgeschlossene δ -Erweiterung von (X, δ', τ') . Nach dem vorausgehenden Theorem 2.17. ist (uX, τ'') kompakt, also ein normaler Raum und daher auch vollständig regulär.

(X, δ', τ') ist als Teilraum von (uX, δ'', τ'') ebenfalls vollständig regulär. qed

KOROLLAR 2: Jeder δ -Raum X kann δ -homöomorph in das TYCHONOFF-Produkt I^μ von μ Intervallen $[0,1]$ eingebettet werden, wo μ die Mächtigkeit von uX ist.

Wir beschließen diesen Abschnitt mit dem

THEOREM 2.18. Jeder δ -Raum X hat genau eine kompakte δ -Erweiterung, nämlich uX .

Beweis: Zunächst verweisen wir auf 2.14., 2.16. und 2.17. - Sodann nehmen wir an, es gäbe einen δ -Raum (X, δ', τ') der zwei, voneinander verschiedene kompakte Erweiterungen (uX, δ'', τ'') und (vX, δ''', τ''') im Sinne von 2.7. zuließe. Bezeichnen wir mit T den topologischen Raum, der dem δ -Raum X unterliegt. Da uX und vX verschiedene Kompaktifizierungen von T sind, gibt es Mengen A und B in T , deren Hüllen in einer der Kompaktifizierungen - o.B.d.A. zum Beispiel in uX - nicht-leeren Durchschnitt haben, während sie sich in vX nicht treffen. Das bedeutet aber, daß A und B in uX benachbart sind, in vX dagegen voneinander getrennt liegen. Das ist aber nicht möglich, denn uX und vX sind δ -Erweiterungen desselben δ -Raums X (Definition 1.17.). qed

3. δ -Räume und Kompaktifizierungen

I. Sei X ein vollständig regulärer Raum. Mit $\delta_\alpha, \delta_\beta, \dots$ bezeichnen wir δ -Strukturen auf X , die sämtlich die Topologie von X erzeugen. Die zugehörigen δ -Räume $(X, \delta_\alpha), (X, \delta_\beta), \dots$ schreiben wir kurz: $X_\alpha, X_\beta, \dots$. Mit $(\alpha X), (\beta X), \dots$ bezeichnen wir ferner Kompaktifizierungen von X .

Die Aussagen der Theoreme 2.16. bis 2.18. können wir zusammenfassend auch in der Form aussprechen

Jede Nachbarschaftsstruktur δ_κ auf X , die die Topologie von X erzeugt, ist von einer eindeutig bestimmten Kompaktifizierung $\kappa X = uX_\kappa$ induziert.

Umgekehrt ist aus Abschnitt 1 (Bemerkung im Anschluß an 1.18.) bekannt

Jede Kompaktifizierung κX von X induziert auf X eindeutig eine δ -Struktur δ_κ so, daß die durch δ_κ in X erzeugte Topologie mit der Topologie des vollständig regulären Raumes X übereinstimmt.

Nach Theorem 2.17. erweist sich die Kompaktifizierung κX als die absolut abgeschlossene δ -Erweiterung (uX, δ'', τ'') des δ -Raumes X_κ ; also gilt stets

$$\kappa X = uX_\kappa \quad (+)$$

Damit erhalten wir das

THEOREM 3.1. Sei X ein vollständig regulärer Raum. Es existiert eine Bijektion u der Menge $\mathcal{R} = \{X_\kappa\}$ aller δ -Räume auf X , deren Topologie mit der von X übereinstimmt, auf die Menge $\tilde{\mathcal{R}} = \{\kappa X\}$ aller seiner Kompaktifizierungen :

$$u : X_\kappa \longrightarrow uX_\kappa = \kappa X.$$

Nach Theorem 3.1. läßt sich die Theorie der δ -Räume auf Aussagen über topologische Räume zurückführen .

Der Begriff des δ -Raums ist äquivalent mit dem Begriff des vollständig regulären Raumes zusammen mit einer gewissen seiner Kompaktifizierungen.

II. In der Menge $\check{\mathcal{K}} = \{\kappa X\}$ aller Kompaktifizierungen des vollständig regulären Raumes X erklären wir nun eine Relation $>$.

DEFINITION 3.2. Die Kompaktifizierung κX ist feiner als die Kompaktifizierung λX , in Zeichen: $\kappa X > \lambda X$, falls eine stetige surjektive Abbildung $h: \kappa X \longrightarrow \lambda X$ existiert mit $h|_X$ die Identität.

LEMMA 3.3. $\check{\mathcal{K}}$ ist durch $>$ teilgeordnet.¹⁾

Andererseits definieren wir in der Menge $\mathcal{R} = \{X_\kappa\}$ aller δ -Räume auf X , deren Topologie mit der eines gegebenen vollständig regulären Raumes X übereinstimmt eine Relation, die wir ebenfalls mit $>$ bezeichnen.

DEFINITION 3.4. $X_\kappa > X_\lambda$ falls die Identitätsabbildung von X auf sich eine δ -Abbildung von X_κ in X_λ ist.

LEMMA 3.5. $\mathcal{R}$ ist durch $>$ teilgeordnet.¹⁾

DEFINITION 3.6. Eine bijektive Abbildung $f: \Xi \longrightarrow H$ der teilgeordneten Menge $(\Xi, >)$ auf die teilgeordnete Menge $(H, >)$ heißt ein $>$ -Isomorphismus, falls f und f^{-1} ordnungstreu sind.

Mit diesen Begriffsbildungen können wir Theorem 3.1. verschärfen zu

THEOREM 3.7. Die Abbildung $u: \mathcal{R} \longrightarrow \check{\mathcal{K}}$ der teilgeordneten Menge $\mathcal{R} = \{X_\kappa\}$ auf die teilgeordnete Menge $\check{\mathcal{K}} = \{\kappa X\}$ ist für jeden vollständig regulären Raum X ein $>$ -Isomorphismus.

¹⁾ Im Sinne von N. BOURBAKI ist $>$ eine 'Präordnung'.

Zum Beweis bedürfen wir des folgenden Theorems. Die Bedeutung dieses Theorems für die Theorie der δ -Räume liegt aber vor allem darin, daß es die Theorie der δ -Abbildungen eines δ -Raums X_κ auf die Theorie der stetigen Abbildungen der Kompaktifizierung $\kappa X = uX_\kappa$ zurückzuführen gestattet. In dieser Hinsicht muß das Theorem 3.8. dem Theorem 3.1. an die Seite gestellt werden.

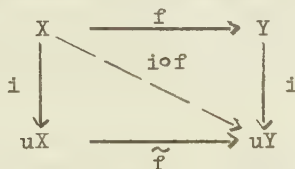
THEOREM 3.8. Erweiterungssatz für δ -Abbildungen

Jede δ -Abbildung $f: X_\kappa \longrightarrow Y_\lambda$ des δ -Raums $X_\kappa = (X_\kappa, \delta_X, \tau_X)$ in den δ -Raum $Y_\lambda = (Y_\lambda, \delta_Y, \tau_Y)$ kann zu einer stetigen Abbildung $\tilde{f}$ des kompakten Raumes $\kappa X = uX_\kappa$ in den kompakten Raum $\lambda Y = uY_\lambda$ fortgesetzt werden.

Den Beweis dieses Theorems stützen wir auf das folgende

LEMMA von TAIMANOV ¹⁾: Sei S ein T_1 -Raum, A ein dichter Teilraum von S und R ein kompakter T_2 -Raum; sei ferner $f: A \longrightarrow R$ eine stetige Abbildung von A in R . f kann genau dann auf S stetig fortgesetzt werden, wenn für alle fremden, in R abgeschlossenen Teilmengen R_1 und R_2 gilt, daß ihre Urbilder in S fremde Hüllen haben: $\overline{f^{-1}(R_1)} \cap \overline{f^{-1}(R_2)} = \emptyset$.

Beweis von Theorem 3.8. ²⁾: Die Situation wird durch das folgende Diagramm wiedergegeben



¹⁾ TAIMANOV [1], Theorem 1. - ²⁾ SMIRNOV hat in [2] S.21, Fußnote (++) ohne nähere Angaben darauf hingewiesen, daß sein umfangreicher Beweis von 3.8. unter Verwendung des Erweiterungssatzes von TAIMANOV durch einen einfachen Beweis ersetzt werden kann. -

Betrachten wir nun zwei beliebige fremde, in uY abgeschlossene Teilmengen A und B : $A \cap B = \emptyset$,
 $\overline{A}^{uY} = A$, $\overline{B}^{uY} = B$. Da uY kompakt ist, impliziert $\overline{A}^{uY} \cap \overline{B}^{uY} = \emptyset$, daß $\overline{\delta}_{uY}(A, B)$ (I, 1.15.).
 Da f und i δ -Abbildungen sind, ist auch $i \circ f$ eine δ -Abbildung; also ist in X : $\overline{\delta}_X((i \circ f)^{-1}(A), (i \circ f)^{-1}(B))$. X ist δ -Teilraum von uX . Nach Definition 1.17., Lemma 1.9. und Lemma 1.15. ist dann auch $\overline{(i \circ f)^{-1}(A)}^{uX} \cap \overline{(i \circ f)^{-1}(B)}^{uX} = \emptyset$. Die Voraussetzungen des Lemmas von TAIMANOV sind erfüllt.
 qed

Beweis von Theorem 3.7.: Sei $X_\kappa > X_\lambda$. Das bedeutet, daß die Identitätsabbildung i von X auf sich eine δ -Abbildung des δ -Raums X_κ in den δ -Raum X_λ ist. Nach Theorem 3.8. kann i zu einer stetigen Abbildung $\tilde{i}$ von $\kappa X = uX_\kappa$ in $\lambda X = uX_\lambda$ fortgesetzt werden. Daraus ergibt sich: $\kappa X > \lambda X$. -

Sei umgekehrt $\kappa X > \lambda X$. Das bedeutet, daß die Identitätsabbildung i von X auf sich zu einer stetigen Abbildung $\tilde{i}$ von κX in λX fortgesetzt werden kann. Nun ist $\kappa X = uX_\kappa$ kompakt; nach 1.24. ist $\tilde{i}$ eine δ -Abbildung von uX_κ in uX_λ ; i ist daher eine δ -Abbildung von X_κ in X_λ . Folglich: $X_\kappa > X_\lambda$.
 qed

Schließlich führen wir noch einige weitere Eigenschaften des Operators $O \langle \dots \rangle$ (Definition 2.8.) an. Sie werden sich vor allem in Teil II als bedeutsam erweisen.

LEMMA 3.9.

4. Für jede Menge $A \subseteq X$ gilt: $O \langle \underline{A} \rangle = O \langle A \rangle$.
5. Für jede Menge $A \subseteq X$ ist $O \langle A \rangle$ offen in uX .
6. Die Mengen $O \langle A \rangle$ mit A offen in X bilden eine Basis für uX .

Beweis:

Zu 4: Da $\underline{A} \subseteq A$, d.h. $\underline{A} \cup A = A$ folgt nach Lemma 2.9.(1b): $0 < \underline{A} > \subseteq 0 < A >$. -

Um $0 < A > \subseteq 0 < \underline{A} >$ zu zeigen, wählen wir irgend ein Ende $\xi \in 0 < A >$. Da $\xi \ni A$ ist A eine δ -Nachbarschaft eines gewissen $B \in \xi$. Nach Lemma 1.12. ist $B \subseteq \underline{A}$, woraus sich $\underline{A} \in \xi$ ergibt. Folglich ist $\xi \in 0 < \underline{A} >$. -

Zu 5: Nach Lemma 1.12. genügt es zu zeigen, daß $0 < A >$ eine δ -Nachbarschaft eines jeden Endes $\xi \in 0 < A >$ ist. - Ist $\xi \in 0 < A >$, so ist $A \in \xi$. Dann gibt es Mengen B und C in ξ so, daß $A \supseteq B \supseteq C$. Da $\bar{\delta}(B, X - A)$ erhalten wir nach 2.9.(2.): $uX = 0 < X - B > \cup 0 < A >$. Daraus ergibt sich: $uX - 0 < A > \subseteq 0 < X - B >$. Nun ist aber $\xi \in 0 < C >$ und $\bar{\delta}(C, X - B)$. Nach Definition 2.10. der δ -Relation in uX bedeutet dies, daß $\bar{\delta}(\xi, uX - 0 < A >)$. -

Zu 6: Angenommen das Ende ξ gehöre zur offenen Menge H von uX . Da $uX - H$ abgeschlossen ist, ist $\bar{\delta}(\xi, uX - H)$. Folglich gibt es Mengen A und B mit $\bar{\delta}(A, B)$ in X und so, daß $\xi \in 0 < A >$ und $uX - H \subseteq 0 < B >$. Also $\bar{\delta}(0 < A >, uX - H)$. Nach (4.) heißt das: Für jede offene Menge $\underline{A}' = A'$ haben wir $\xi \in 0 < \underline{A}' > = 0 < \underline{A}' > \subseteq H$. qed

LEMMA 3.10. Für jede Menge A eines gegebenen δ -Raums X ist die Menge $0 < A >$ die größte aller offenen Mengen H von uX , die in X den Kern $\underline{A}$ von A ausschneidet, für die also $H \cap X = \underline{A}$.

Beweis: Für jede Menge $A \subseteq X$ erhalten wir nach Lemma 3.9.(6.) und Lemma 2.9.(1b.) die Inklusion

$$0(\underline{A})^1 = \bigcup_i 0 < A_i > \subseteq 0 < \bigcup_i A_i > \quad (+)$$

¹⁾ Mit $0(\dots) = 0_{uX}^X(\dots)$ bezeichnen wir den Operator, der jeder offenen Menge C von (X, τ') die größte offene Menge H von (uX, τ'') zuordnet, die C aus X ausschneidet. (SMIRNOV, [6])

Nach Lemma 2.12. deduzieren wir

$$\underline{A} = X \cap O(\underline{A}) = X \cap \bigcup_i O < A_i > = \bigcup_i A_i.$$

Nach Lemma 3.9.(4.) und (+) haben wir die Inklusion

$$O < A > = O < \underline{A} > = O < \bigcup_i A_i > \supseteq O(\underline{A}) .-$$

Die Umkehrung : $O(\underline{A}) \supseteq O < \underline{A} > = O < A >$
ergibt sich aus dem Lemma 3.9.(5.) und der Definition
des Operators $O(\dots) = O_{uX}^X(\dots)$. - Damit haben
wir

$$O_X < A > = O_{uX}^X(\underline{A}) .$$

Lemma 3.10. besagt also: Betrachtet man den Operator
 $O < \dots > = O_X < \dots >$ nur auf dem System aller offenen
Mengen des δ -Raums X , so stimmt er mit dem Operator
 $O(\dots) = O_{uX}^X(\dots)$ überein.

II. ČECH-Cohomologie der δ -Paare und ihrer Kompaktifizierungen

=====

1. Die Kategorie der δ -Paare

Sei X ein vollständig regulärer Raum, δ_κ eine δ -Relation auf X , die die Topologie von X erzeugt und $\kappa X = uX_\kappa$ die (nach I,2.18.) eindeutig bestimmte Kompaktifizierung von X , durch die δ_κ in X induziert wird.

DEFINITION 1.1. Ist X ein δ -Raum und $A \subseteq X$ in X abgeschlossen, so nennen wir das Paar $[X, A]$ ein δ -Paar.

Die Kategorie der δ -Paare und ihrer (stetigen) δ -Abbildungen bezeichnen wir mit $\mathcal{A}_\delta$.

LEMMA 1.2. Ist (X, δ', τ') ein δ -Raum und $A \subseteq X$ in (X, τ') abgeschlossen, so ist die Hülle $\tau''(A) = \bar{A}^{uX}$ von A in (uX, δ'', τ'') die Kompaktifizierung uA von A (im Sinne von I,2.17.).

Beweis: Ist $\bar{A}^{uX}$ die Hülle von A in uX , so liegt A trivialerweise in $\bar{A}^{uX}$ dicht. $\bar{A}^{uX}$ ist außerdem als abgeschlossene Teilmenge des kompakten Raumes uX selbst kompakt. Also ist $\bar{A}^{uX}$ (nach I,2.17.) die δ -Erweiterung uA des δ -Teilraums A von X . qed

Ist $[X, A]$ ein δ -Paar, so ist nach Lemma 1.2. (uX, uA) ein Paar aus der Kategorie $\mathcal{A}_c$ der kompakten Paare und ihrer stetigen Abbildungen.

Nach Theorem I,3.8. kann man jede (stetige) δ -Abbildung $f : [X, A] \longrightarrow [Y, B]$ von δ -Paaren zu einer stetigen Abbildung $\tilde{f} : [uX, uA] \longrightarrow [uY, uB]$ fortsetzen.

Die Funktionen uX und $\hat{f}$ bilden also einen kovarianten Funktor $u : \mathcal{A}_\delta \longrightarrow \mathcal{A}_\delta$ auf der Kategorie der δ -Paare mit Werten in der Kategorie der kompakten Paare.

Ist nun H die ČECHsche Cohomologietheorie auf $\mathcal{A}_\delta$, so kann für jedes ganzzahlige q und jedes δ -Paar $[X, A]$ ${}_s H^q [X, A]$ definiert werden als ${}_s H^q(u[X, A]) = {}_s H^q[uX, uA]$. Jede δ -Abbildung $f: [X, A] \longrightarrow [Y, B]$ induziert die entsprechenden Homomorphismen f^* der relativen Cohomologiegruppen. Die Komposition des Funktors u mit H ergibt also eine Cohomologietheorie ${}_s H^u$ auf der Kategorie $\mathcal{A}_\delta$ der δ -Paare $[X, A]$. Für diese mit H assoziierte Theorie ${}_s H^u$ auf $\mathcal{A}_\delta$ kann eine direkte Beschreibung über die Nerven von δ -Überdeckungen gegeben werden.

2. δ -Überdeckungen

DEFINITION 2.1. Sind α und β Familien von Mengen in X , die auf derselben Indexmenge $V_\alpha = V_\beta$ erklärt sind derart, daß für jedes $v \in V_\alpha$ $\beta_v \subseteq \alpha_v$, so heißt β Reduktion von α . Gilt für jedes $v \in V_\alpha$ die stärkere Bedingung: $\beta_v \in \alpha_v$, so heißt β δ -Reduktion von α .

DEFINITION 2.2. Eine δ -Reduktion des δ -Paares $[X, A]$ ist eine endliche Überdeckung $\alpha = (\alpha_v)$ von $[X, A]$ mit dem Indexmengenpaar (V_α, V_α^A) , zu der es eine δ -Reduktion $\beta = (\beta_v)$ mit dem gleichen Indexmengenpaar gibt, die ihrerseits Überdeckung von $[X, A]$ ist.

Die Kollektion aller offenen δ -Überdeckungen von $[X, A]$ bezeichnen wir mit $\text{Cov}_\delta[X, A]$, die Kollektion aller endlichen offenen Überdeckungen von $[X, A]$ mit $\text{Cov}^f[X, A]$.

LEMMA 2.3. Jede endliche offene Überdeckung $\gamma = (\gamma_v)$ eines kompakten Paares (X, A) ist eine δ -Überdeckung.

Beweis: Zu jeder endlichen offenen Überdeckung $\gamma = (\gamma_v)$ eines kompakten Paares (X, A) mit (V_γ, V_γ^A) existiert eine abgeschlossene Überdeckung $\beta = (\beta_v)$ des gleichen Paares (X, A) mit dem gleichen Indexmengenpaar $(V_\beta, V_\beta^A) = (V_\gamma, V_\gamma^A)$ so, daß $\beta_v \subseteq \gamma_v$ für alle $v \in V_\gamma$ bzw. $v \in V_\gamma^A$. Nun sind in einem kompakten Raum je zwei disjunkte abgeschlossene Mengen voneinander entfernt (Lemma I, 1.15.). Also gilt für die abgeschlossenen Mengen β_v und $X - \gamma_v$ (wegen $\beta_v \cap (X - \gamma_v) = \emptyset$) $\delta(\beta_v, X - \gamma_v)$, d.h. $\beta_v \in \gamma_v$ für jedes v . qed

DEFINITION 2.4. Ist $f: [X, A] \longrightarrow [Y, B]$ eine δ -Abbildung und $\beta \in \text{Cov}_\delta[Y, B]$, so ist $f^{-1}\beta$ die Überdeckung $\alpha \in \text{Cov}^f[X, A]$ mit dem gleichen

Indextmengenpaar $(V_\alpha, V_\alpha^A) = (V_\beta, V_\beta^B)$, die definiert ist durch $\alpha_v := f^{-1}(\beta_v)$ für jedes $v \in V_\beta$.

Die Überdeckung $\alpha = f^{-1}\beta$ ist eine δ -Überdeckung. Denn: $\beta \in \text{Cov}_\delta[Y, B]$, also existiert eine Überdeckung β' mit dem gleichen Indextmengenpaar und mit $\beta'_v \in \beta_v$ für jedes v . Zusammen mit der Definition (I, 1.20. bzw. 1.21.) der δ -Abbildung folgt dann aus $\bar{\delta}_Y(\beta'_v, Y - \beta_v)$ die Beziehung $\bar{\delta}_X(f^{-1}(\beta'_v), f^{-1}(Y - \beta_v))$, d.h. aber $\bar{\delta}_X(\alpha'_v, X - \alpha_v)$, also $\alpha'_v \in \alpha_v$.

LEMMA 2.5. Zu jeder δ -Überdeckung $\alpha = (\alpha_v)$ des δ -Paares $[X, A]$ bildet das System $(0 < \alpha_v >)$ eine δ -Überdeckung 0α des kompakten (δ -)Paares $[uX, uA]$.

Beweis: Sei α eine δ -Überdeckung von $[X, A]$ mit dem Indextmengenpaar (V_α, V_α^A) . Dann wählen wir (Definition II, 2.2.) eine endliche Überdeckung $\beta = (\beta_v)$ mit dem gleichen Indextmengenpaar so, daß $\alpha_v \supseteq \beta_v$ für alle $v \in V_\alpha$. Nach Definition I, 1.10. und Lemma I, 2.9.(2) erhalten wir dann für jedes $v \in V_\alpha$ die Gleichung

$$0 < X - \beta_v > \cup 0 < \alpha_v > = uX. \quad (+)$$

Nach Lemma I, 3.10. erhalten wir weiter für jedes $v \in V_\alpha$

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_v^{uX} &= \bar{\beta}_v^{uX} = \overline{X - X - \beta_v}^{uX} = uX - \underline{0(X - \beta_v)} \\ &= uX - 0 < X - \beta_v > . \end{aligned}$$

Daraus und aus der Beziehung (+) folgt

$$\bar{\beta}_v^{uX} = uX - 0 < X - \beta_v > \subseteq 0 < \alpha_v > .$$

Folglich wegen $\bigcup_v \bar{\beta}_v^{uX} = \overline{\bigcup_v \beta_v}^{uX} = \bar{X}^{uX} = uX :$

$$uX \subseteq \bigcup_v 0 < \alpha_v > .$$

Entsprechend gilt für alle $v \in V_\alpha^A$ wegen $V_\alpha^A \subseteq V$:

$$\overline{\beta}_v^{uX} \subseteq 0 < \alpha_v > .$$

Nun ist $\bigcup_{V_\alpha^A} \alpha_v \supseteq A$ und per definitionem für die zugehörige δ -Reduktion $\beta \bigcup_{V_\beta^A} \beta_v \supseteq A$, also:

$$\bigcup \overline{\beta}_v^{uX} \supseteq \overline{A}^{uX} = uA . \text{ Wegen } \bigcup \beta_v^{uX} = \bigcup \overline{\beta}_v^{uX}$$

ergibt sich also

$$uA \subseteq \bigcup_{V_\alpha^A} \overline{\beta}_v^{uX} \subseteq \bigcup_{V_\alpha^A} 0 < \alpha_v > .$$

Das System $(0 < \alpha_v >)$ mit (V_α, V_α^A) als Indexmengenpaar ist eine Überdeckung von (uX, uA) . Daß $0 < \alpha_v >$ eine δ -Überdeckung ist, ergibt sich aus Lemma 2.3. . qed

LEMMA 2.6. Ist $i : [X, A] \subseteq [uX, uA]$ die Inklusionsabbildung des δ -Paares $[X, A]$ in das zugehörige kompakte Paar (uX, uA) , so ist die Abbildung $i^{-1} : \text{Cov}_\delta [uX, uA] \longrightarrow \text{Cov}_\delta [X, A]$ surjektiv.

Beweis: Sei $\alpha = (\alpha_v) \in \text{Cov}_\delta [X, A]$ mit dem Indexmengenpaar (V_α, V_α^A) . Wir bilden dann für jedes $v \in V_\alpha$ die Menge $\beta_v = 0 < \alpha_v >$. Nach Lemma 2.5. ist $\beta = (\beta_v)$ eine (endliche) offene δ -Überdeckung von $[uX, uA]$

$$\bigcup_{V_\alpha} 0 < \alpha_v > \supseteq uX \quad \text{und} \quad \bigcup_{V_\alpha^A} 0 < \alpha_v > \supseteq uA.$$

Nach Lemma I, 3.10. ist weiter $X \cap 0 < \alpha_v > = X \cap \beta_v = \alpha_v$, also $i^{-1} \beta_v = \alpha_v$. qed

DEFINITION 2.7. Seien α und β zwei δ -Überdeckungen des δ -Paares $[X, A]$. β heißt Verfeinerung von α , in Zeichen: $\alpha < \beta$, wenn zu jedem $v \in V_\beta$ ein $w \in V_\alpha$ existiert so, daß $\beta_v \subseteq \alpha_w$ und zu jedem $v' \in V_\beta^A$ ein $w' \in V_\alpha^A$ so, daß $\beta_{v'} \subseteq \alpha_{w'}$.

LEMMA 2.8. Die Relation $<$ auf $\text{Cov}_\delta [X, A]$ ist eine Teilordnung, d.h. $\alpha < \alpha$ für jedes $\alpha \in \text{Cov}_\delta [X, A]$ und $\alpha < \beta < \gamma$ impliziert $\alpha < \gamma$.

Beweis: Aus den entsprechenden Eigenschaften der $\subseteq$ -Relation.

LEMMA 2.9. $\text{Cov}_\delta [X, A]$ ist bezüglich der Relation $<$ gerichtet.

Beweis: Zu zeigen ist: Zu jedem Paar $\alpha, \beta \in \text{Cov}_\delta [X, A]$ existiert ein $\gamma \in \text{Cov}_\delta [X, A]$ so, daß $\alpha < \gamma$ und $\beta < \gamma$. -
Dazu definieren wir $V_\gamma := V_\alpha \times V_\beta$ und $V_\gamma^A := V_\alpha^A \times V_\beta^A$. $v \in V_\gamma$ bedeutet also $v = (v_1, v_2)$ mit $v_1 \in V_\alpha$, $v_2 \in V_\beta$. Definieren wir weiter $\gamma_v := \alpha_{v_1} \cap \beta_{v_2}$, so gilt: Zu jedem $v \in V_\gamma$ existiert ein $v_1 \in V_\alpha$ so, daß $\gamma_v \subseteq \alpha_{v_1}$, und zu jedem $v \in V_\gamma$ existiert ein $v_2 \in V_\beta$ so, daß $\gamma_v \subseteq \beta_{v_2}$, wobei $\bigcup_{V_\gamma} \gamma_v = X$ und $\bigcup_{V_\gamma^A} \gamma_v = \bigcup_{V_\gamma^A} (\alpha_{v_1} \cap \beta_{v_2}) \ni A$.

Da γ eine δ -Überdeckung sein soll, muß es zu γ eine δ -Reduktion geben. Nun sind aber α und β δ -Überdeckungen. Wählen wir δ -Reduktionen α' und β' von α und β und bilden analog $\gamma'_v := \alpha'_{v_1} \cap \beta'_{v_2}$ mit

(V_γ, V_γ^A) , so gilt (I, 1.11.(N₄)) : $\alpha_{v_1} \cap \beta_{v_2} \ni \alpha'_{v_1} \cap \beta'_{v_2}$, also $\gamma_v \ni \gamma'_v$ für jedes $v \in V_\gamma$.
qed

3. Die ČECH-Cohomologie-Gruppen der δ -Räume und ihrer Kompaktifizierungen

I. Sei $\text{Cov}_\delta[X, A]$ die Kollektion aller offenen δ -Überdeckungen des δ -Paares $[X, A]$.

Für jedes $\alpha \in \text{Cov}_\delta[X, A]$ bezeichne (X_α, A_α) den Nerv von α .

Sei weiter

$${}_\delta H_\alpha^q := {}_\delta H^q(X_\alpha, A_\alpha; G)$$

die q-te Cohomologiegruppe des Nerts (X_α, A_α) mit der Koeffizientengruppe G (oder dem Koeffizienten-R-Modul G) über $\text{Cov}_\delta[X, A]$.

Für jede Relation $\alpha < \beta$ in $\text{Cov}_\delta[X, A]$ sei

$$\pi_\beta^\alpha: {}_\delta H_\alpha^q \longrightarrow {}_\delta H_\beta^q$$

der von irgend einer Projektion $p: (X_\beta, A_\beta) \longrightarrow (X_\alpha, A_\alpha)$ induzierte Homomorphismus.

Die Kollektion $({}_{}_\delta H_\alpha^q, \pi_\beta^\alpha)$ heißt das q-te ČECH-Cohomologie-System von $[X, A]$ über G . Es ist bekanntlich ein direktes System von Gruppen, das hier auf dem gerichteten System $\text{Cov}_\delta[X, A]$ definiert ist. Der Übergang zum direkten Limes

$$\varinjlim {}_\delta H_\alpha^q = \varinjlim {}_\delta H_\alpha^q(X_\alpha, A_\alpha; G) =: {}_\delta H^q[X, A; G]$$

liefert die q-te ČECH-Cohomologie-Gruppe von $[X, A]$ über G definiert über $\text{Cov}_\delta[X, A]$.

Ganz entsprechend kann man ${}_\delta H^q[uX, uA; G]$ als direkten Limes

$$\varinjlim {}_\delta H^q(uX_\alpha, uA_\alpha; G) =: {}_\delta H^q[uX, uA; G]$$

über dem gerichteten System $\text{Cov}_\delta[uX, uA]$ erklären.

THEOREM 3.1. Für jedes δ -Paar $[X, A]$ induziert die Inklusionsabbildung $i : [X, A] \subseteq [uX, uA]$ Isomorphismen

$$\phi_X^\infty = \phi_{X,A}^\infty : {}_\delta H^q[X, A] \approx {}_\delta H^q[uX, uA] .$$

Beweis: Die Gruppen ${}_\delta H^q[X, A]$ und ${}_\delta H^q[uX, uA]$ seien als direkte Limiten über $\text{Cov}_\delta[X, A]$ bzw. über $\text{Cov}_\delta[uX, uA]$ nach der ČECH-Methode definiert. Zu zeigen ist dann, daß

$$\phi_X^\infty : \varinjlim {}_\delta H^q(uX_\alpha, uA_\alpha) \longrightarrow \varinjlim {}_\delta H^q(X_{\alpha'}, A_{\alpha'})$$

für jedes q ein Isomorphismus ist.

Um zunächst eine Abbildung $\Phi = (\Phi, \phi_\alpha^*)$ des direkten Systems der Gruppen $({}_{{}_\delta H^q}(uX_\alpha, uA_\alpha), \pi_\beta^\alpha)$ in das direkte Gruppensystem $({}_{{}_\delta H^q}(X_{\phi\alpha}, A_{\phi\alpha}), \pi_{\phi\beta}^{\phi\alpha})$ zu erklären, gehen wir von der Inklusionsabbildung

$$i : [X, A] \subseteq [uX, uA]$$

aus. Das Urbild $i^{-1}(B)$ jeder Teilmenge B von uX ergibt sich durch Spurbildung; insbesondere erhalten wir nach II, 2.4. und I, 1.25. für jedes $\alpha \in \text{Cov}_\delta[uX, uA]$ $i^{-1}\alpha$ als die δ -Überdeckung β von $[X, A]$ mit dem gleichen Indexpaar $(V_\beta, V_\beta^A) = (V_\alpha, V_\alpha^A)$, wobei $\beta_v := i^{-1}\alpha_v = \alpha_v \cap X$ für jedes $v \in V_\alpha$.

Die Abbildung

$$\Phi = i^{-1} : \text{Cov}_\delta[uX, uA] \longrightarrow \text{Cov}_\delta[X, A]$$

ist ordnungstreu. Ist $\alpha < \alpha'$ in $\text{Cov}_\delta[uX, uA]$, so existiert zu jedem α'_v ein α'_w mit $\alpha'_v \subseteq \alpha'_w$. Für $i^{-1}\alpha'_v = \alpha'_v \cap X$ und $i^{-1}\alpha'_w = \alpha'_w \cap X$ folgt dann $\alpha'_v \cap X \subseteq \alpha'_w \cap X$, d.h. $i^{-1}\alpha'_v = \beta'_v \subseteq i^{-1}\alpha'_w = \beta'_w$.

Für die Nerven erhalten wir weiter die Inklusionsabbildungen

$$\phi_\alpha : (X_{\phi\alpha}, A_{\phi\alpha}) \subseteq (uX_\alpha, uA_\alpha) .$$

Die Φ_α induzieren die Abbildungen

$$\Phi_\alpha^* : {}_\delta H^q(uX_\alpha, uA_\alpha) \longrightarrow {}_\delta H^q(X_{\Phi\alpha}, A_{\Phi\alpha}) .$$

Wegen der Kommutativität im folgenden Diagramm

$$\begin{array}{ccc} {}_\delta H^q(uX_\alpha, uA_\alpha) & \xrightarrow{\pi_\beta^\alpha} & {}_\delta H^q(uX_\beta, uA_\beta) \\ \Phi_\alpha^* \downarrow & & \downarrow \Phi_\beta^* \\ {}_\delta H^q(X_{\Phi\alpha}, A_{\Phi\alpha}) & \xrightarrow{\pi_{\Phi\beta}^{\Phi\alpha}} & {}_\delta H^q(X_{\Phi\beta}, A_{\Phi\beta}) \end{array}$$

ist $\Phi = (\phi, \phi_\alpha^*)$ eine Abbildung des Gruppensystems von (uX_α, uA_α) über $\text{Cov}_\delta[uX, uA]$ in das Gruppensystem von $(X_{\Phi\alpha}, A_{\Phi\alpha})$ über $\text{Cov}_\delta[X, A]$. Die Limesabbildung Φ_∞ ist also definiert

$$\Phi_\infty : {}_\delta H^q[uX, uA] \longrightarrow {}_\delta H^q[X, A] .$$

Wir behaupten nun, daß $\Phi_\infty = i^*$ für jedes q ein Isomorphismus ist.

Dazu bemerken wir zuerst, daß $\phi = i^{-1}: \text{Cov}_\delta[uX, uA] \longrightarrow \text{Cov}_\delta[X, A]$ nach Lemma II, 2.6. surjektiv ist. Die Inklusionen ϕ_α werden damit zu Identitäten. Denn: $(X_{\alpha'}) \subseteq (uX_\alpha)$ und $(A_{\alpha'}) \subseteq (uA_\alpha)$, falls $\alpha \in \text{Cov}_\delta[uX, uA]$ und $\alpha' = i^{-1}\alpha$. Bleibt zu zeigen, daß auch $(X_{\alpha'}) \supseteq (uX_\alpha)$ und $(A_{\alpha'}) \supseteq (uA_\alpha)$, d.h. daß $uX \cap \alpha'_{v_0} \cap \dots \cap \alpha'_{v_p} \neq \emptyset$ die Beziehung impliziert: $X \cap \alpha'_{v_0} \cap \dots \cap \alpha'_{v_p} \neq \emptyset$. Nun liegt X dicht in uX , A dicht in uA , also $uX \cap \alpha'_{v_0} \cap \dots \cap \alpha'_{v_p} = \bar{X} \cap \alpha'_{v_0} \cap \dots \cap \alpha'_{v_p} \neq \emptyset$. Da die α_v offen sind ergibt sich $X \cap \alpha'_{v_0} \cap \dots \cap \alpha'_{v_p} = X \cap (\alpha'_{v_0} \cap X) \cap \dots \cap (\alpha'_{v_p} \cap X) = X \cap \alpha'_{v_0} \cap \dots \cap \alpha'_{v_p} \neq \emptyset$.

Entsprechend zeigt man, daß $A_{\alpha'} \supseteq uA_\alpha$.

Die von den ϕ_α induzierten ϕ_α^* sind also Isomorphismen. Also ist auch (nach EILENBERG-STEENROD [1], VIII, 4.13) ϕ_X^∞ ein Isomorphismus. qed

Sind $[X, A]$ und $[Y, B]$ δ -Paare und

$$f : [X, A] \longrightarrow [Y, B]$$

eine δ -Abbildung, so induziert f einerseits

$$f^* : {}_\delta H^q[Y, B] \longrightarrow {}_\delta H^q[X, A] .$$

Andererseits besitzt f nach Theorem I, 3.8. eine stetige Fortsetzung

$$\tilde{f} : [uX, uA] \longrightarrow [uY, uB] ,$$

wo $[uX, uA]$ bzw. $[uY, uB]$ die kompakten δ -Erweiterungen von $[X, A]$ und $[Y, B]$ sind. $\tilde{f}$ induziert

$$\tilde{f}^* : {}_\delta H^q[uY, uB] \longrightarrow {}_\delta H^q[uX, uA] .$$

Sind ϕ_X^∞ bzw. ϕ_Y^∞ die Isomorphismen (Theorem 3.1.) zwischen den Cohomologiegruppen der δ -Paare und denen ihrer Komoaktivifizierungen, so gilt

THEOREM 3.2. Das folgende Diagramm ist kommutativ

$$\begin{array}{ccc} {}_\delta H^q[X, A] & \xleftarrow{f^*} & {}_\delta H^q[Y, B] \\ \uparrow \phi_X^\infty & & \uparrow \phi_Y^\infty \\ {}_\delta H^q[uX, uA] & \xleftarrow{\tilde{f}^*} & {}_\delta H^q[uY, uB] \end{array}$$

Beweis: Wir bemerken zunächst, daß zu den Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} [X, A] & \xrightarrow{f} & [Y, B] \\ \downarrow i & & \downarrow i \\ [uX, uA] & \xrightarrow{\tilde{f}} & [uY, uB] \end{array}$$

die folgenden Abbildungen der Überdeckungen gehören

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Cov}_\delta [X, A] & \xleftarrow{f^{-1}} & \text{Cov}_\delta [Y, B] \\
 \uparrow \phi_X & & \uparrow \phi_Y \\
 \text{Cov}_\delta [uX, uA] & \xleftarrow{\tilde{f}^{-1}} & \text{Cov}_\delta [uY, uB] .
 \end{array}$$

Dabei haben Urbild- und Bildüberdeckung jeweils gleiches Indexmengenpaar.

Für die Nerven haben wir dann die Inklusionsabbildungen

$$\begin{array}{ccc}
 (X_{\phi\alpha'}, A_{\phi\alpha'}) & \xrightarrow{f_\alpha} & (Y_{\phi\alpha}, B_{\phi\alpha}) \\
 \downarrow \phi_{\alpha'} & & \downarrow \phi_\alpha \\
 (uX_{\alpha'}, uA_{\alpha'}) & \xrightarrow{\tilde{f}_\alpha} & (uY_\alpha, uB_\alpha) .
 \end{array}$$

(+)

Die induzierten Homomorphismen sind

$$\begin{array}{ccc}
 {}_\delta H^q(X_{\phi\alpha'}, A_{\phi\alpha'}) & \xleftarrow{f_\alpha^*} & {}_\delta H^q(Y_{\phi\alpha}, B_{\phi\alpha}) \\
 \uparrow \phi_{\alpha'}^* & & \uparrow \phi_\alpha^* \\
 {}_\delta H^q(uX_{\alpha'}, uA_{\alpha'}) & \xleftarrow{\tilde{f}_\alpha^*} & {}_\delta H^q(uY_\alpha, uB_\alpha) .
 \end{array}$$

(++)

Ist nun $h^q \in {}_\delta H^q[uY, uB]$, so existiert ein $\alpha \in \text{Cov}_\delta [uY, uB]$ und ein $h_\alpha^q \in {}_\delta H^q(uY_\alpha, uB_\alpha)$ so, daß $\prod^\alpha h_\alpha^q = h^q$. Zum Beweis unserer Behauptung genügt es, die Kommutativität von Diagramm (++) nachzuweisen. Diese ergibt sich aber aus der Kommutativität von Diagramm (+). Nach Theorem 3.1. sind die ϕ_α und $\phi_{\alpha'}$ Identitäten und $(X_{\phi\alpha'}, A_{\phi\alpha'})$ Teilkomplex von $(Y_{\phi\alpha}, B_{\phi\alpha})$ und $(uX_{\alpha'}, uA_{\alpha'})$

Teilkomplex von (uY_α, uB_α) . Also $\tilde{f}_\alpha \phi_\alpha = \phi_\alpha f_\alpha$.
ged

Analog folgt aus der Tatsache, daß die ϕ^∞ und ϕ_A^∞ im folgenden Diagramm Isomorphismen - bzw. die zugehörigen ϕ_α und $\phi_\alpha|_A$ Identitäten - sind, unmittelbar das

THEOREM 3.3. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} {}_\delta H^q[A] & \xrightarrow{\partial} & {}_\delta H^{q+1}[X, A] \\ \uparrow \phi_A^\infty & & \uparrow \phi_{X, A}^\infty \\ {}_\delta H^q[uA] & \xrightarrow{\partial} & {}_\delta H^{q+1}[uX, uA] \end{array}$$

ist kommutativ. ∂ bezeichnet den Corandoperator.

Da weiter f^* und ∂ vertauschbar sind, können wir die Theoreme 3.1. bis 3.3. zusammenfassen zum

THEOREM 3.4. Die ČECH-Cohomologietheorien der δ -Paare und ihrer kompakten δ -Erweiterungen sind isomorph.

Nach Theorem 3.1. ist

$${}_\delta H^q[X, A] \approx {}_\delta H^q[uX, uA] .$$

Nach Lemma II, 2.3. ist jede endliche offene Überdeckung eines kompakten Paares eine δ -Überdeckung. Also

LEMMA 3.5. ${}_\delta H^q[uX, uA] = H^q(uX, uA)$,

wobei die $H^q(uX, uA)$ mit der ČECH-Methode über $\text{Cov}^f(uX, uA)$ erklärt sind.

KOROLLAR 3.6. ${}_\delta H^q[X, A] \approx H^q(uX, uA)$.

II. Sei X ein vollständig regulärer Raum. Nach Definition I,3.2. bzw. I,3.4. ist sowohl in der Kollektion aller Kompaktifizierungen wie in der Kollektion aller δ -Räume (X, δ_κ) , deren Topologie mit der von X übereinstimmt, eine Teilordnung $>$ erklärt.

Jeder vollständig reguläre Raum X besitzt eine maximale (feinste) Kompaktifizierung, die ČECH-STONE-Kompaktifizierung βX . ¹⁾ βX induziert in X eine δ -Struktur δ_β .

DEFINITION 3.7. Ist X ein vollständig regulärer Raum und βX die ČECH-STONE-Kompaktifizierung von X , so nennen wir (in Übereinstimmung mit I, 3.4.) den durch βX in X induzierten δ -Raum $(X, \delta_\beta) = X_\beta$ den feinsten δ -Raum in $\{X_\kappa\}$.

Die von βX in X induzierte δ -Relation δ_β ist wie folgt bestimmt

LEMMA 3.8. Je zwei Teilmengen A und B von X sind in X_β benachbart, $\delta_\beta(A, B)$, genau dann, wenn sie durch keine URYSOHN-Funktion trennbar sind, d.h. wenn es keine stetige Funktion $f : X \longrightarrow [0, 1]$ gibt mit $f(x) = 0$ für alle $x \in A$ und $f(x) = 1$ für alle $x \in B$.

Beweis: βX ist bekanntlich durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert ²⁾: (1) βX ist ein kompakter Raum. (2) X ist in βX dicht eingebettet. (3) Haben die Hüllen zweier Teilmengen A und B von X in βX von $\emptyset$ verschiedenen Durchschnitt, so sind A und B in X durch keine URYSOHN-Funktion trennbar. - Nach I,1.15. ist im kompakten Raum βX die Beziehung $\bar{A} \cap \bar{B} \neq \emptyset$ gleichwertig mit $\delta_{\beta X}(\bar{A}, \bar{B})$. Dies ist nach I,1.9. wiederum gleichwertig mit $\delta_{\beta X}(A, B)$. Nun ist X_β ein Teilraum von βX , also nach I,1.17. in X_β : $\delta_\beta(A, B)$.

¹⁾ KELLEY [1], S.152. - ²⁾ ČECH [1], S.833-834.

Andererseits folgt nach (3) aus $\bar{A} \cap \bar{B} \neq \emptyset$, daß A und B funktional ununterscheidbar sind.

$\delta_\beta(A,B)$ impliziert also, daß A und B in X_β durch keine URYSOHN-Funktion trennbar sind. - Umgekehrt impliziert $\bar{\delta}_\beta(A,B)$, daß A und B in X_β funktional trennbar sind. Denn: X_β ist δ -Teilraum von βX . $\bar{\delta}_\beta(A,B)$ ist gleichwertig mit $\bar{\delta}_{\beta X}(\bar{A},\bar{B})$. Damit ist dann in βX $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$ (I, 1.15.). $\bar{A}$ und $\bar{B}$ sind in βX funktional getrennt. Schränken wir die trennende URYSOHN-Funktion f auf X ein, so sind A und B in X funktional getrennt. qed

Ist (X,A) ein normales Paar und $(\beta X, \beta A)$ die ČECH-STONE-Kompaktifizierung des Paares (X,A) , so gilt (EILENBERG-STEENROD [1], X, 9.12.)

$$(1) \quad H_F^q(X,A) \approx H^q(\beta X, \beta A) .$$

Andererseits induziert βX in X eine δ -Relation δ_β . Für das normale δ -Paar $[X_\beta, A_\beta]$ gilt dann nach II, 3.1., 3.5.

$$(2) \quad {}_\delta H^q[X_\beta, A_\beta] \approx {}_\delta H^q[\beta X, \beta A] = H^q(\beta X, \beta A)$$

also

$$(3) \quad H_F^q(X,A) \approx {}_\delta H^q[X_\beta, A_\beta] .$$

Weiter haben wir

LEMMA 3.9. Ist (X,A) ein normales Paar und $[X_\beta, A_\beta]$ das durch βX in (X,A) induzierte δ -Paar, so ist jede endliche offene Überdeckung α von $[X_\beta, A_\beta]$ eine offene δ -Überdeckung.

Beweis: Da X normal ist, gibt es zu jedem endlichen offenen $\alpha \in \text{Cov}^f(X,A)$ eine Schrumpfung γ mit $\gamma_v \subseteq \bar{\gamma}_v \subseteq \alpha_v$ für jedes $v \in V_\alpha$. Die ab-

geschlossenen Mengen $\overline{\gamma}_V$ und $(X - \alpha_V)$ sind fremd und, da X normal ist, durch eine URYSOHN-Funktion trennbar. Nach 3.8. ist dann $\overline{\delta}_\beta(\overline{\gamma}_V, X - \alpha_V)$, d.h. aber $\alpha_V \supseteq \overline{\gamma}_V$. qed

Für das normale δ -Paar $[X, A]$ ergibt sich daraus

$$(4) \quad H_F^q[X_\beta, A_\beta] = {}_\delta H^q[X_\beta, A_\beta].$$

Zusammen mit (3) erhalten wir schließlich

$$(5) \quad H_F^q(X, A) \approx H_F^q[X_\beta, A_\beta].$$

Zusammenfassend haben wir das

THEOREM 3.10. Ist (X, A) ein normales Paar, $(\beta X, \beta A)$ die ČECH-STONE-Kompaktifizierung des Paares (X, A) und $[X_\beta, A_\beta]$ das durch β induzierte δ -Paar, so gilt

$$H_F^q(X, A) \approx H_F^q[X_\beta, A_\beta] \approx {}_\delta H^q[X_\beta, A_\beta] \approx {}_\delta H^q[\beta X, \beta A] = H^q(\beta X, \beta A).$$

Ein topologischer (insbesondere: vollständig regulärer) Raum X besitzt eine minimale (gröbste) Kompaktifizierung, die ALEXANDROFF'sche Ein-Punkt-Kompaktifizierung ιX genau dann, wenn X lokal-kompakt ist. ¹⁾ ιX induziert in X eine δ -Struktur δ_ι .

DEFINITION 3.11. Ist X ein lokal-kompakter Raum und ιX die Ein-Punkt-Kompaktifizierung, so nennen wir (in Übereinstimmung mit I, 3.4.) den durch ιX in X induzierten δ -Raum $(X, \delta_\iota) = X_\iota$ den gröbsten δ -Raum in $\{X_K\}$.

Die δ -Relation δ_ι kann direkt beschrieben werden durch die

¹⁾ KELLEY [1], S. 150, 152.

DEFINITION 3.12. Je zwei Teilmengen A und B in X sind in X_L benachbart, $\delta_L(A, B)$, genau dann,

- (i) wenn entweder $\bar{A}$ und $\bar{B}$ nicht kompakt, oder
- (ii) wenn $\bar{A}$ oder $\bar{B}$ kompakt und $\bar{A} \cap \bar{B} \neq \emptyset$.

Die Berechtigung dieser Definition ergibt sich aus der Definition der Topologie in X_L .

Anwendung der Beziehungen 3.4. und 3.5. ergibt das

THEOREM 3.13. Ist (X, A) ein lokal-kompaktes Paar ¹⁾, (X_L, A_L) die ALEXANDROFFsche Ein-Punkt-Kompaktifizierung des Paares (X, A) und $[X_L, A_L]$ das durch ι induzierte δ -Paar, so gilt

$$\delta H^q [X_L, A_L] \approx \delta H^q [\iota X, \iota A] = H^q(\iota X, \iota A).$$

Bezüglich der Existenz feinsten bzw. größten δ -Strukturen können wir zusammenfassend bemerken

LEMMA 3.14. In der Menge $\mathcal{R} = \{X_K\}$ aller δ -Räume, deren Topologie mit der eines gegebenen vollständig regulären Raumes X übereinstimmt, gibt es einen feinsten δ -Raum $(X, \delta_\beta) = X_\beta$. In $\mathcal{R}$ gibt es einen größten δ -Raum $(X, \delta_L) = X_L$ genau dann, wenn X lokal-kompakt ist.

Nach I, 1.16. ist ein kompakter Raum auf genau eine Weise ein δ -Raum. Der mit einem nicht-kompakten Raum X assoziierte δ -Raum ist genau dann eindeutig bestimmt, wenn (X, δ_β) und (X, δ_L) zusammenfallen. Ein Vergleich der δ -Relationen δ_β und δ_L (3.8., 3.12.) liefert insbesondere das Kriterium

THEOREM 3.15. Ein vollständig regulärer Raum X ist genau dann auf genau eine Weise ein δ -Raum, wenn je zwei abgeschlossene nicht-kompakte Mengen von X durch keine URYSOHN-Funktion trennbar sind.

¹⁾ Definition vgl. EILENBERG-STEENROD [1], S.5.

Ein Beispiel für einen solchen nicht-kompakten Raum
 - für den anders gesagt die β - und die ι -Kompaktifizierung zusammenfallen - liefert der Raum $\bigcup_0$ aller Ordinalzahlen $\lambda < \omega_1$.¹⁾

Die zu einem solchen δ -Raum X gehörige Kompaktifizierung uX ist also zugleich maximal und minimal .

THEOREM 3.16. Ist (X, A) ein normales Paar und sind in X je zwei abgeschlossene nicht-kompakte Mengen durch keine URYSOHN-Funktion trennbar , so gilt

$$H_F^q(X, A) \approx \delta H^q[X_\kappa, A_\kappa] \approx \delta H^q[\kappa X, \kappa A] =$$

$$H^q(\kappa X, \kappa A) = H^q(\beta X, \beta A) = H^q(\iota X, \iota A) .$$

¹⁾ KELLEY [1] , S. 131 E, 163 E, 167 Q . -
 GILLMAN - JERISON [1] , 5.11., 5.12., 6 J.

L i t e r a t u r

P.S.ALEXANDROFF

- [1] Bikompakte Erweiterungen topologischer Räume, Rec.math.Moscou , n.Ser.5 (1939), 403 - 423

H.BAUER

- [1] Kennzeichnende Eigenschaften der Alexandroffschen Erweiterung αE eines topologischen Raumes, Bull.Soc.Math.Gréce, XXX , 1,2,3, (1954), 47 - 53

E.ČECH

- [1] On bicomcompact spaces, Ann.of Math. 38 (1937), 823 - 844
- [2] Topological Spaces, London 1966

A.CSÁSZÁR

- [1] Grundlagen der allgemeinen Topologie, Budapest 1963

V.A.EFREMOVIČ

- [1] Nonequimorphism for Euclidean and Lobačevskij spaces, Uspehi Mat.Nauk 4 no.3 (30) (1949), 178 - 179
- [2] Infinitesimal spaces, Dokl.Akad.Nauk SSSR 76 (1951), 341 - 343
- [3] Infinitesimal spaces, Uspehi Mat.Nauk 6 no. 4 (44) (1951), 203 - 204
- [4] The geometry of proximity, I, Mat.Sb.(N.S.) 31 (73) (1952), 189 - 200

S.EILENBERG - N.STEENROD

- [1] Foundations of Algebraic Topology, Princeton 1952

L.GILLMAN - M.JERISON

- [1] Rings of Continuous Functions, London 1960

J.L.KELLEY

- [1] General Topology , London 1955

Z.P.MAMUZIČ

- [1] Introduction to General Topology, Groningen 1963

B.ĀOSPISIL

- [1] Remark on bicomact spaces, Ann.of Math.38 (1937), Nr. 4 , 845 - 846

P.SAMUEL

- [1] Ultrafilters and Compactification of Uniform Spaces, Trans.Amer.Math.Soc. 64 (1948) 100 - 132

Y.M.SMIRNOV

- [1] On proximity spaces in the sense of V.A.EFREMOVIČ , Dokl.Akad.Nauk.SSSR 84 (1952), 895 - 898 ; Engl.Übers.: Amer.Math.Soc.Transl. (2) 38 (1964), 1 - 4
- [2] On proximity spaces , Mat.sb.(N.S.) 31 (73) (1952), 543 - 574 ; Engl.Übers.: loc. cit. 5 - 35
- [3] On the completeness of proximity spaces I , Trudy Moskov.Mat.Obsč. 3 (1954), 271 - 306; Engl.Übers.: loc. cit. 37 - 73
- [4] On the completeness of proximity spaces II, Trudy Moskov.Mat.Obsč. 4 (1955), 421 - 438; Engl.Übers.: loc. cit. 75 - 93

Y.M.SMIRNOV

- [5] On the dimension of proximity spaces, Mat. Sb. 38 (80) (1956), 283 - 302 ; Engl. Übers.: loc. cit. (2) 21 (1962), 1 - 20
- [6] On coverings of topological spaces, Moskov. Gos.Univ.Uč.Zap. 148 (1951), Mat. 4, 204 - 215

A.D.TAĬMANOV

- [1] On extension of continuous mappings of topological spaces , Mat.Sb.(N.S.) 31 (73)(1952) 459 - 463

H.WALLMAN

- [1] Lattices and topological Spaces, Ann. of Math. 39 (1938) , 112 - 126

Lebenslauf

Am 15. Juli 1930 wurde ich als Sohn des Oberinspektors Otto Fischer und seiner Ehefrau Luise , geb. Horneber , in Fürth/Bay. geboren.

Von 1936 bis 1940 besuchte ich die Volksschule, von 1940 an die Oberrealschule in Fürth und legte dort im Jahre 1948 die Reifeprüfung ab.

Im Sommersemester 1949 begann ich mit dem Studium der Mathematik und Physik an der Universität Erlangen. Mathematik-Vorlesungen hörte ich bei Herrn Professor Dr. O. Haupt, Herrn Professor Dr. G. Nöbeling, Herrn Professor Dr. W. Specht, Herrn Priv. Doz. Dr. D. Kappos und Herrn Priv. Doz. Dr. H. Küneth, sowie bei den Herren Dr. F. Hirzebruch und Dr. H. J. Kowalsky. Im November 1953 legte ich die Wissenschaftliche Prüfung für das Lehramt an Höheren Schulen in Mathematik und Physik ab.

Den Vorbereitungsdienst für das Höhere Lehramt leistete ich in den Jahren 1954 und 1955 als Studienreferendar im Studienseminar der Oberrealschule in Fürth ab.

Von September 1955 bis August 1958 war ich als Lehramtsassessor an der Oberrealschule in Füssen, anschließend an der Ohm-Oberrealschule in Erlangen tätig. Dort wurde ich 1959 zum Studienrat ernannt.

Im Dezember 1963 wurde ich als Studienrat im Hochschuldienst an das Mathematische Institut der Universität Erlangen-Nürnberg abgeordnet, im Januar 1965 zum Oberstudienrat und im Juli 1968 zum Oberkonservator ernannt.

Seit 1962 bin ich mit Annelie Wittwer verheiratet. Wir haben einen Sohn.

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hegl, 8520 Erlangen Hauptstr. 109, (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990
